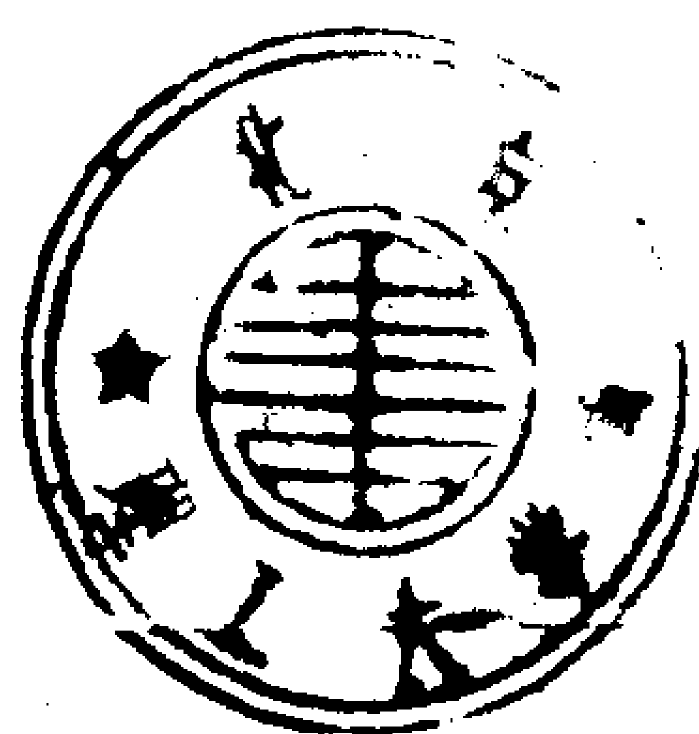
# TECHNIQUES IN FRACTAL GEOMETRY

# 分形几何中的技巧

[英] 肯尼思·法称科内 著
曾文曲 王向阳 陆夷 译





964619

东北大学出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

分形几何中的技巧/（英）肯尼思·法称科内（Kenneth J. Falconer）著；曾文曲，王向阳，陆夷译. —沈阳：东北大学出版社，1999. 6

书名原文：Techniques in Fractal Geometry

ISBN 7-81054-393-8

Ⅰ. 分… Ⅱ. ①法… ②曾… ③王… ④陆… Ⅲ. 解析拓扑学 Ⅳ. O189. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 40430 号



©东北大学出版社出版

（沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　邮政编码 110006）

丹东日报印刷厂印刷　　各地新华书店经销

开本：850×1168　1/32　字数：283 千字　印张：10. 875

印数：1～2500 册

1999 年 6 月第 1 版　　1999 年 6 月第 1 次印刷

责任编辑：冯淑琴　　责任校对：孟　颖

封面设计：唐敏智　　责任出版：秦　力

定价：17. 00 元

# 内 容 提 要

本书集中介绍了最近几年出现的、在研究分形的数学理论中行之有效的各种新技巧，其中包括各种研究维数及分形集和分形测度的其它参数的方法，以及概率分析中的重要定理，如遍历定理和更新定理在分形研究中的应用，同时还阐述了许多新的更复杂的技巧，如热力学形式体系及切线测度等，这都是深入研究分形必不可少的工具。

本书可以看成是《分形几何——数学基础及其应用》一书的续篇，是深入进行分形理论研究必备的教科书和参考书。

本中译本的翻译出版获得了广东省自然科学基金的部分资助。

# 中 译 本 前 言

《分形几何中的技巧》被译成中文，我感到非常高兴，当今世界，人们对分形数学的应用兴趣正与日俱增。我也特别注意到中国学者对分形有相当的兴趣，中国的大学及一些研究机构已经做了大量的出色的研究工作。我希望此书能有助于一些最新的分形理论的观点和方法，为广大的学生和研究人员所接受，让我再次感谢曾文曲教授组织翻译此书，这样的翻译工作需要极高的数学水平和语言技巧，我非常赞赏他们的辛勤劳动与献身精神。

**肯尼思 J·法尔科内**

(Kenneth J. Falconer)

1998 年 7 月于 St. Andrews, Scotland

# 原著前言

本书叙述当前在分形的数学理论研究中的各种技巧。对那些研究分形几何以及在数学或者科学的其它领域中遇见分形的人，这是一本指导和参考性的著作，并且书中包含的材料有助于进一步的研究。此书是1990年出版的《分形几何——数学基础及其应用》一书的续篇.《分形几何——数学基础及应用》中包含了分形数学理论的主要内容，它原来的目的是提供给研究生读者的，但是随着人们对这个学科兴趣的迅速增长，它已被用来作为本科生的基本教程。

阅读本书需要适当的数学分析的基础，一定的概率论知识对阅读书中的若干地方是有帮助的。读者应当熟悉《分形几何——数学基础及应用》一书的基本内容，特别是关于维数和迭代函数系；在第一章复述了主要的思想和符号。本书经常用到来自《分形几何——数学基础及应用》一书的资料，并用FG表示。

书中介绍的许多内容是近年来出现的，其中包括研究维数和分形集及测度的其它参数的各种方法，以及更复杂的技巧。比如热力学形式体系及切线测度，它们现在频繁地被用于分形几何的研究中，并有广泛的应用。书中同时也包括了若干来自概率分析的“大定理”，比如遍历定理和更新定理，它们已经有效地应用到分形的研究中。在叙述基本理论的同时，也举出了许多例子和应用，比如在微分方程和调和分析领域。书中的一些结果是首次给出，但对它的证明通常是简化了的。

《分形几何中的技巧》一书的风格与《分形几何——数学基础及应用》相似，在数学上是准确的，但目的是给出对所研究课题的直观感觉，而不是纠缠到不必要的形式上的细节中去。基础的概念

介绍尽可能简单，而许多理论只对相当特殊的情况作了详细的展开，并在后面带有一个较一般情形下的类似的概述。例如，只对康托集的一个简单的非线性推广介绍了热力学形式体系。与《分形几何——数学基础及应用》中一样，测度的论的技巧尽量减少，而测度的"直观"性质的存在性则认为是当然的。"*"号标明的部分在首次阅读时可以略过而不影响阅读的连贯发展。

并不企图使本书包括绝大部分已知的结论，作者深信，阐明数学思想及概念比技术细节更重要。经常见到这样的数学著作，过分的一般性遮盖住了简明且优美的数学思想。通常，如果理解了基本的数学思想，那么读者就会明白如何将它们结合或发展成更一般的结果。希望读者能把书中讨论的问题推广到更一般的情形。

每一章后面都有关于所阐述论题的历史及最近发展状况的简要注记。对所研究的覆盖一定范围的某个论题所涉及的资料是浩如烟海的，所以书中只给出那些令人感兴趣的，能跟踪论题进一步发展的，最新的以及关键性工作的资料。每章后附有的练习，是为了加深正文的内容，并指明进一步的理论和给出必要的例子。

由于书中包含的论题是相当广泛的，因而要保持符号的完全一致是不可能的。书中的一些地方，只好在标准符号与自相容性之间作一折衷。本书在符号上与《分形几何——数学基础及应用》中的符号也有某些区别。

在写作以及修改后的稿中总不可避免有一些错误，我对此感到十分遗憾，希望这些错误是明显的，不至于将读者引入歧途。对本书的电子版本我反复的订正和修改。据我的经验，可以断言，作为有能力的作者，用传统的方法蜷曲在椅子上，用手工认真地修改打字稿，比在计算机屏幕上修改要好得多，这将费力较少，没有那么大的压力，也可能会更准确。

我非常感谢参与此书出版准备工作的全体人员， 特别是 John Howroyd, Maarit Järvenpää, Pertti Mattila, Lars Olsen和 Toby O'Neil 对本书的初稿提出了非常有益的意见。Ben Soares 制作了图象，并与 Toby O'Neil 一起设计和制作了封面的照片。我十分感谢 Gill Gardner, 他把我的几乎是模糊不清的手稿全部输入电脑，使之成为电子版本。同时也感谢 John Wiley and Sons 出版社的工作人员，特别是 Stuart Gale, David Ireland 和 Helen Ramsey, 他们负责了此书的出版。

最后，我要感谢我的家庭，感谢在我写作本书的期间，他们的巨大的耐心和理解。

Kenneth J.Falconer

1996 年 4 月于 St . Andrews

**注记：**

在参考文献中，引用作者早些时候出版的书《分形几何——数学基础及其应用》时，用 FG 表示。

书中用"*"号标明的部分，可以在首次阅读时略过。

# 引 论

“分形”这个名字源自于拉丁文的“破碎”，它是由 Benoit Mandelbrot 在他 1975 年发表的奠基性的论文中，为高度不规则的集合给出的命名。从那时起，分形几何引起了人们广泛的注意，当然，有时也引起了激烈的争论。

这个学科的发展，主要有两个方面：一方面是科学与自然中的许多“真实的分形”得到了验证；另一方面，随着在分形分析中的新工具的产生，用于研究分形集的数学理论与方法有了巨大的发展，其中大部分源自于几何测度论。这本书主要涉及分形研究中的数学理论与方法。

人们做了各种努力企图给分形一个数学定义，但是这些定义都很难验证是适用于一般的情形。这里我们不给分形下确切的定义，而是考虑欧几里得空间中的集合 $E$，如果它具有下面所有的或是大部分的性质，它就是分形：

(i) $E$ 具有精细的结构，即有任意小比例的不规则的细节。

(ii) $E$ 是如此的不规则，以至于无论它的局部或整体都不能用微积分的或传统的几何语言来描述。

(iii) 通常 $E$ 具有某种自相似或自仿射性质，可能是统计或者是近似意义上的。

(iV) $E$ 的“分形维数”（用某种方式定义的）通常严格大于它的拓扑维数。

(V) 在许多令人感兴趣的情形，$E$ 具有非常简单的，可能是由迭代给出的定义。

(Vi) 通常 $E$ 有“自然”的外貌。

分形的例子比比皆是，但分形的某些类型引起了特别的注意。在简单的变换族之下不变的分形，它的例子显示在图0.1中，这些分形包括自相似分形、自仿射分形、近似自相似分形及统计自相似分形。特别，一些自相似分形是众所周知的，如三分康托集，von Koch 曲线，Sierpinski 三角形（或垫）以及 Sierpinski 地毯，参见图0.2。作为动力系统吸引子或斥子的分形，比如由复函数迭代产生的 Julia 集已有了广泛的探讨。

分形几何研究的对象是具有性质(i)—(vi)的集合，其中令人感兴趣的许多问题，仍然是几个世纪以来在研究传统的几何对象中提出的问题，这包括

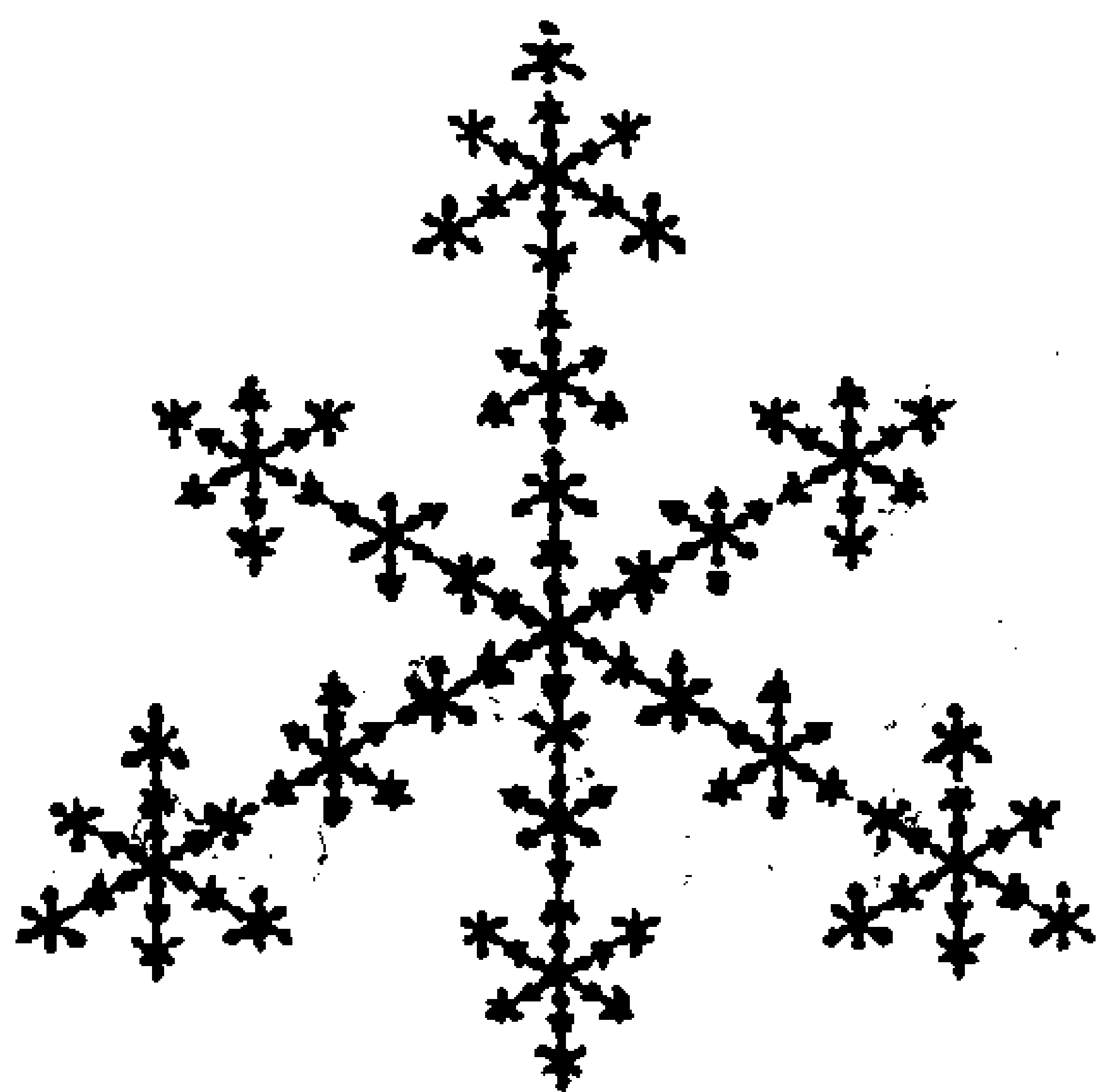
(a) 确定：探索定义分形的有效方法，例如迭代函数系就提供了确定某类分形的一种方法。

(b) 局部描述：局部光滑的曲线看起来与直线段类似，而分形没有这样简单的局部结构。诸如密度，切线测度的概念提供了分形的局部信息。

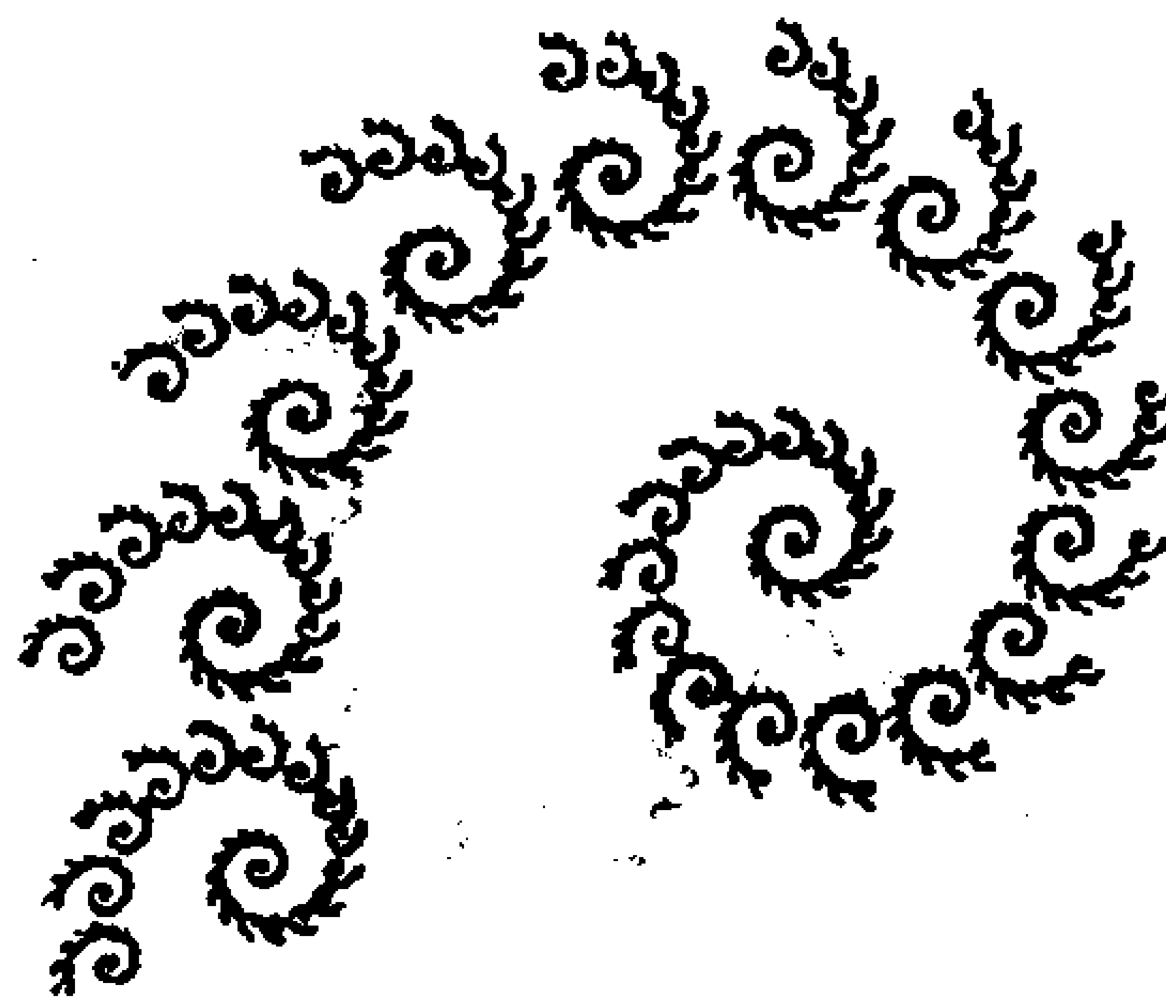
(c) 分形的度量："度量"分形的常用方法是利用某种形式的维数，然而维数只是提供有限的信息，并且现已引入确定分形外貌的一些其它方法。比如"缺项性"及"多孔性"被用来描述集合中小尺度"空洞"的比例。上述两个量还有更多的作用，了解它们的定义和性质需要较深的数学基础。

可能有人认为，在分形分析中过分强调了维数的作用。确实，维数（各种不同的定义）在数学上是较易处理的，并且经常可以用实验估计，而且分形物体的维数经常与它的其它性质联系在一起。比如，经过区域边界的热流的速度依赖于边界的维数，动力系统的吸引子的维数也与其它动力学参数，如李雅普洛夫指数相关连。然而，物体的复杂分形外貌不仅由它的维数，而且还非常需要由合适的分形测度来反映。

(d) 分类：我们寻求根据重要的几何性质对分形进行分类的



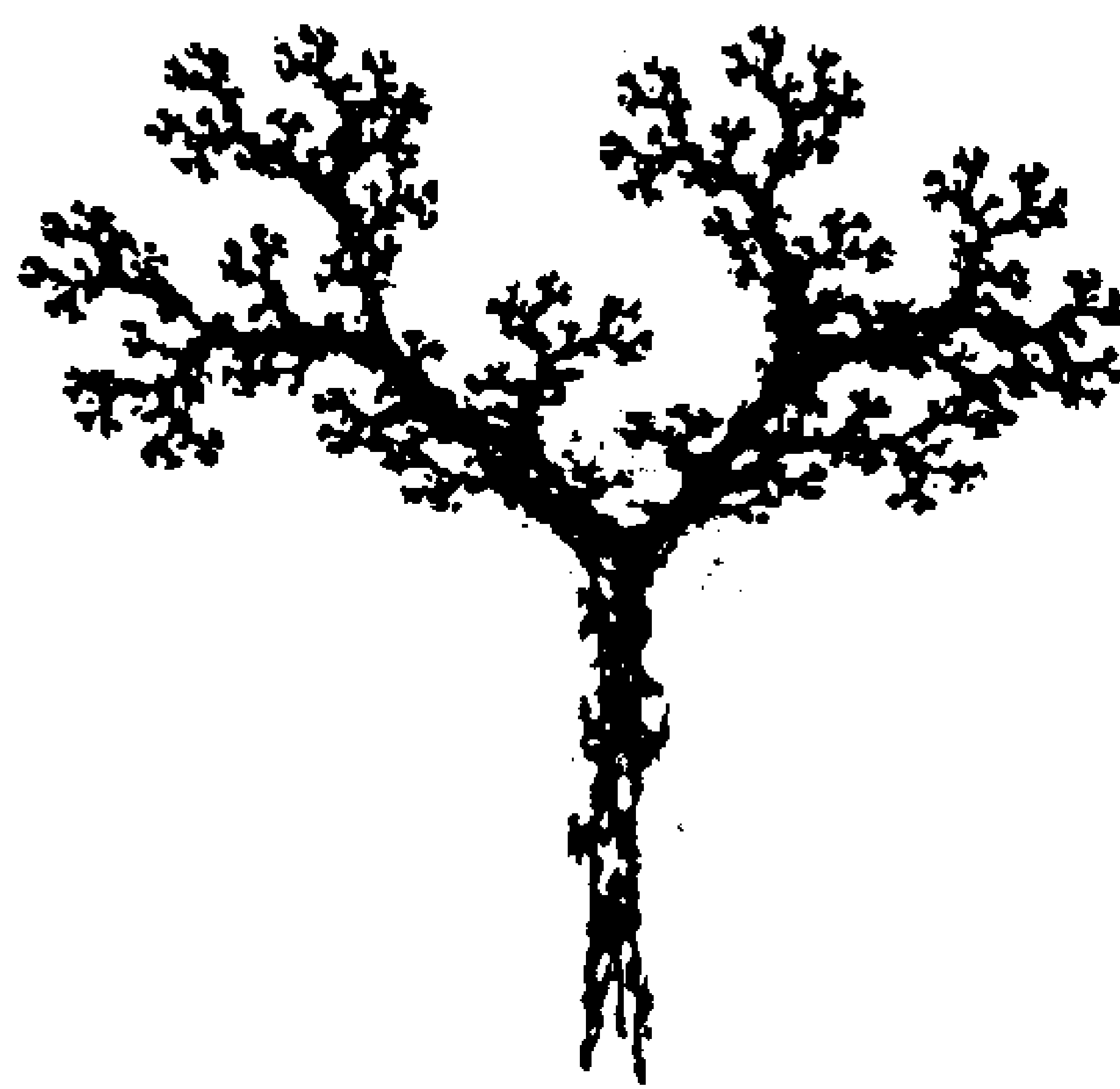
(a)



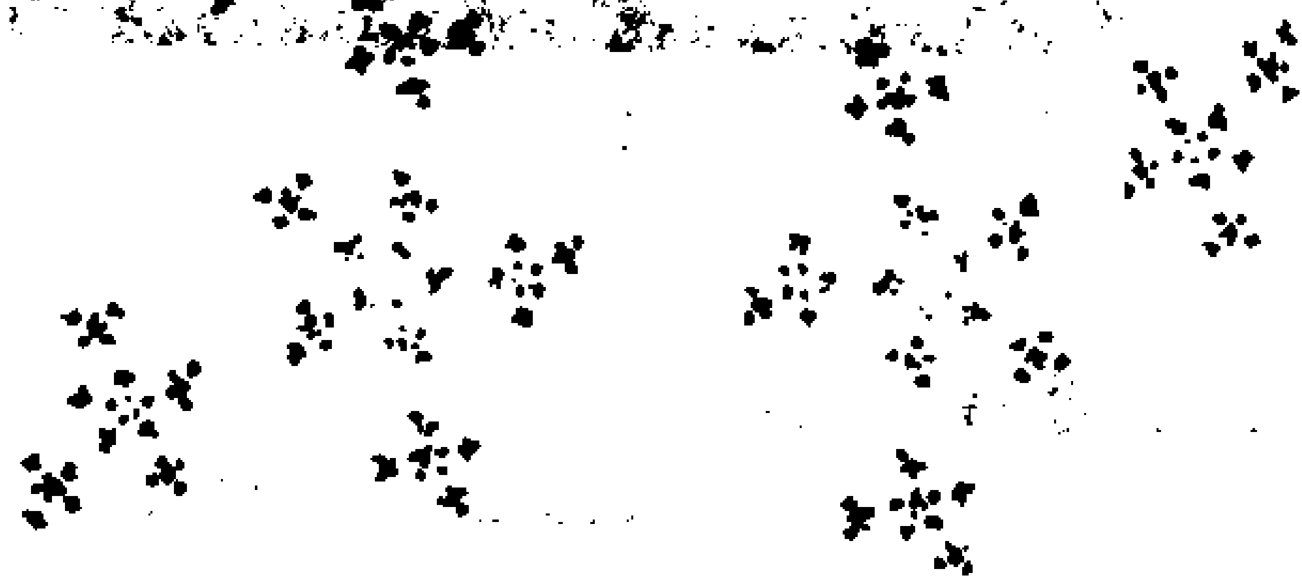
(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

图 0.1　在映射族下不变的分形. (a) 和(b) 是自相似的, (c)和(d) 是自仿射的, (e) 是自保形的, 而(f) 是统计自相似的

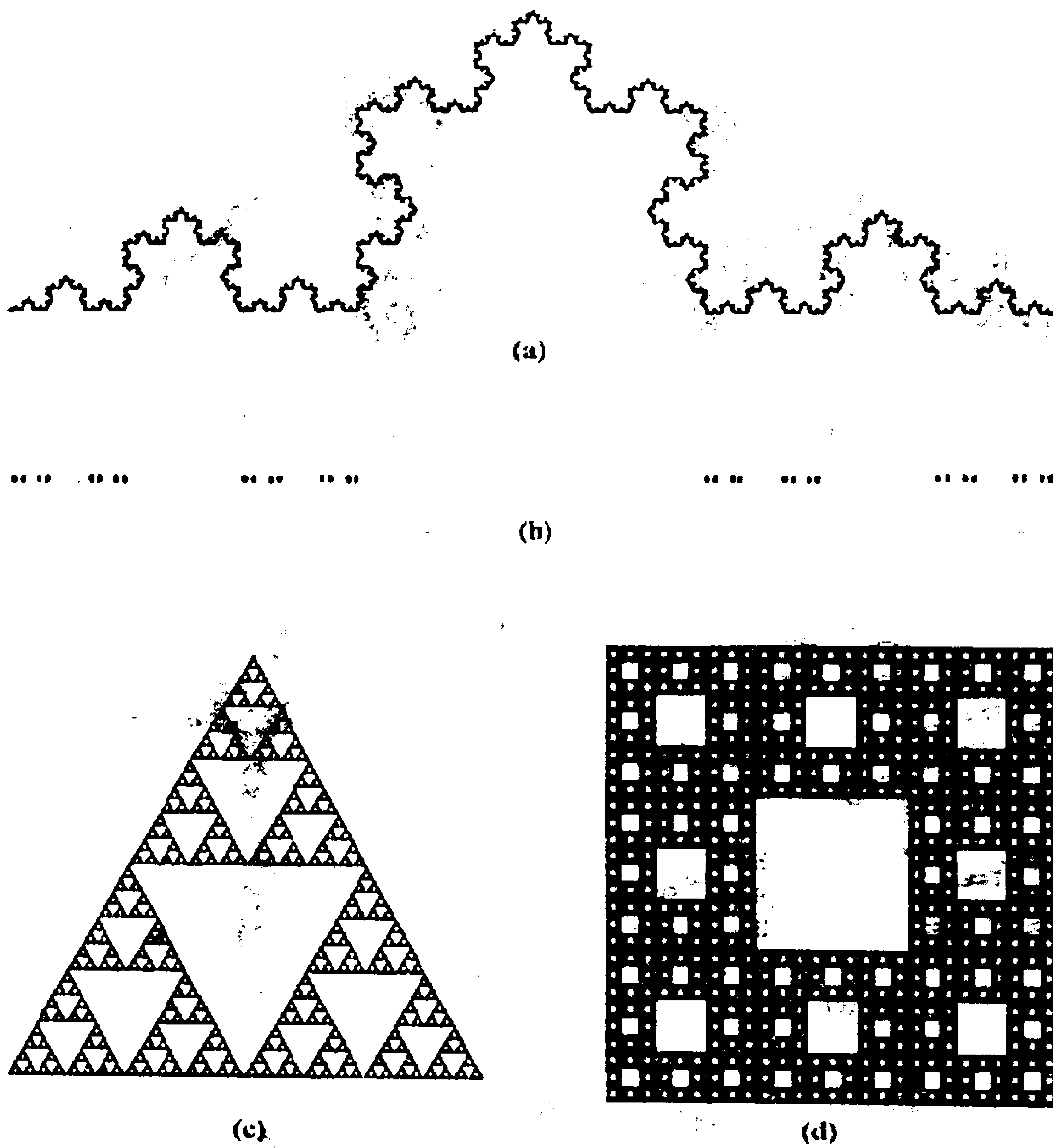



图 0.2　众所周知的自相似集. (a) von Koch 曲线(维数为 $\log 4/\log 3 = 1.262$), (b) 三分康托集(维数为 $\log 2/\log 3 = 0.631$); (c) Sierpinski 三角形或垫(维数为 $\log 3/\log 2 = 1.585$), (d) Sierpinski 地毯(维数为 $\log 8/\log 3 = 1.893$)

方法。一种处理方法是如果两个集合间存在双李卜希兹映射，则将它们看成是等价的(正像在拓扑中，如果两集合是同胚的，则把它们看成是等价的一样)，并且寻求等价集的“不变性”。比如两个双李卜希兹等价的集有相同的维数，但是，这其中维数并不是完全不变的。除了某些相当特殊的一类集合，有许多并不等价的集合，它们可以有相同的维数。

(e) 几何性质：正交投影、交集、乘积集等的性质，都是令人感兴趣的问题。

(f) 在其它数学领域中的分形：分形很自然地出现在许多数学领域，例如，动力系统或者双曲型几何，分形几何的一般理论应当很容易联系到这些领域。

(g) 分形几何在典型的物理现象中的应用：在物理学及自然中有许多“近似分形”，它们经常可以用“数学的”分形来模拟。确实，对物理现象，数学理论将告诉我们更多的东西。

在一些领域，数学和物理结合得相当紧密，例如，布朗运动的维纳模型给出了在分子的碰撞之下，质点运动的不规则轨道的一个合理的概率描述。然而在其它领域，科学或自然中遇见的分形与适合数学上研究的分形之间经常有相当的不同。在实际中，诸如“为什么物体有分形结构？”或者“如果出现某些分形特征，由此可以得到什么推论？”这样的问题都还没有被完全令人满意的回答。尽管如此，这方面的研究还是有所进展，越来越多的分形已被从“动力学”角度进行研究，例如热流通过分形域扩散的现象已从数学上进行模拟。

分形的特征更经常是由测度而不仅仅是由集合来显示。“多重分形分析”展现了(有时是相当丰富的)测度的分形结构，以及单个测度可以导出分形集的完整的谱。上述(a)→(g)提出的许多问题都可以像对集合提出一样对测度提出，并且现在也正以研究分形集的平行方法对多重分形测度进行研究。

本书介绍了在研究分形及多重分形方面发展起来的一些技巧，下面简要浏览一下书中涉及的内容。

第一章集中介绍了在全书中要用到的一般定义和符号，讨论了一些涉及半可乘序列和凸函数的不等式。还介绍了有关测度理论的基本思想，为了后面的引用，还导出了关于测度收敛性的一些结果。

第二章回顾了分形几何的基本概貌，这些内容在早些时候出版的 FG 一书中有详细得多的讨论。同时还回顾了维数(豪斯道夫、填充和盒维数)的基本定义和计算它们的方法，并讨论了迭代函数系产生的分形。

第三章介绍了在研究维数中的两种有用的技巧。第一个是隐含法，这种方法并不需要了解分形的确切维数值，而能对它的某些性质进行研究。特别是那些在相对较弱的意义下"近似自相似"的集合，从维数的观点看来，必然会显示出引人注意的规律性。第二，在这一章中还找出了实数集的盒维数与相应余集的区间长度之间的关系。在一定的意义下，盒维数描述集合的余集，而豪斯道夫维数描述集合本身。

下面两章进一步利用近似自相似的概念导出"热力学形式体系"，这个强有力的技巧(它源自于统计力学)把有关严格自相似集的"线性"理论延拓成"近似自相似集"上的"非线性"结论。并在 cookie — cutter 集这种特殊的情形下发展了热力学系统的理论，这种"cookie — cutter"集可以看成是一种"非线性康托集"。在推导出对这种集合的"有界畸变"原理之后，利用一类函数的"压力"，得到了这种集合的维数公式。

第六至第八章介绍了有关概率分析的三个基本结果：遍历定理、更新定理及鞅收敛定理。给出了这些结果的证明，并将这些结果应用到诸如分形的平均密度，自相似集的计盒数和分形在双李卜希兹映射下的分类上。

第九章介绍了切线测度，它本质上是点周围的测度的放大序列的极限。切线测度类似于导数，在这个意义上，它含有集合或测度的局部结构的信息。但它有比原测度更规则的性态。这一章还给出了集合密度的简单应用，特别是利用切线测度证明了，非整数维集合几乎处处没有密度。在这一章中还说明了切线测度怎样才能应用到调和分析的问题中去。

人们经常很自然地去研究测度而不是集合的分形性质，确实，许多分形集，比如动力系统的吸引子本质上已经是测度。第十、十一两章讨论测度的分形性质，特别考虑 $x$ 的集合 $E_\alpha$，对给定的测度 $\mu$，在 $E_\alpha$ 的每一点上，$\mu$ 都具有局部维数 $\alpha$，即在 $E_\alpha$ 上，以 $x$ 为中心的充分小的球的测度（大约）等于球的半径的 $\alpha$ 次方。对某些 $\mu$，及一定范围的 $\alpha$，集 $E_\alpha$ 可能比较“大”，而 $E_\alpha$ 的“大小”可以用 $\mu$ 或者可以用维数来度量。在第十章中，考虑了导致 $\mu$ 的“维数分解”的 $\mu(E_\alpha)$；而第十一章则考察了 $E_\alpha$ 的维数，导出了 $\mu$ 的“多重分形谱”。还利用热力学形式体系把这一理论推广到非线性情形。

第十二章介绍了分形几何与微分方程理论相互作用的几个途径。在这个领域中，已经发展了一些重要的方法，并且本书前面的一些技巧也可以应用到这个领域中。这一章介绍了处理动力系统吸引子维数与微分方程关系的一般方法，还讨论了关于偏微分方程解的区域中分形边界的作用，特别是分形性影响解的渐近形式及特征值的渐近分布的方式。本章的最后一节涉及到在分形的区域上建立微分方程的问题。本章的内容是在较大范围内选取的，一般都没给出完整的证明。

分形几何可以从许多不同的观点进行研究，不可避免，书中采用的处理方法反映了作者自己所积累的学术经验。书中包含的论题是根据作者的兴趣及一时的念头选取的，还有许多应用于分形分析中的其它有价值的技巧，如小波方法和在图象压缩中应用的各种不同的迭代函数系，书中都没有论及。虽然如此，书中描

述的各种方法都是具有广泛的应用的，并且有希望在将来发现进一步的应用。

## 注记与参考文献

自从 Mandelbrot 开创性的论文发表以来(1975,1982)，已经出版了大量关于分形的各种书籍，Edgar (1990)，Falconer (1990)，Mehaute(1991) 和 Peitgen 等(1992)的这些书给出了分形的基本的数学处理方法。Federer(1969) Falconer(1985)和 Mattila (1995) 的书专门探讨了几何测度论，Rogers(1970) 的书讨论了豪斯道夫测度的一般理论，而 Wicks (1991) 的书是从非标准分析的观点来处理这个论题。强调计算机与分形结合的书有 Peitgen 和 Saupe(1988) 及 Devaney 和 Keen(1989) 的书. 包括 Barnsley (1988), Peruggia (1993) 的一些书特别讨论了迭代函数系。而 Barnsley 和 Hurd(1993) 及 Fisher(1995) 的书是涉及图象压缩的应用。Massopust(1994) 的书讨论了分形函数和曲面，Tricot (1995) 的书考虑了分形曲线。Kahane(1985) 和 Stoyan 兄弟 (1994) 的书中包括了随机分形的材料。Edgar (1993) 选编的关于分形的"优秀论文"选使我们能从历史的角度了解分形这个论题。

许多令人感兴趣的问题可以从 Cherbit(1991)，Bélair 和 Dubuc (1991)，Bedford 等(1991)，Bandt 等(1992) 和 Bandt 等编辑的关于分形数学的会议论文集中找到。

有大量的关于分形在物理上的应用的书，这其中有 Pietronero 和 Tosatti (1986), Feder (1988), Fleischmann 等 (1990), Smith (1991), Vicsek(1992) 和 Hastings(1993) 等编著的书。

# 目　录

# 第1章　数学背景

本章集中叙述了一些常用的数学性质，供后面的章节中参考使用。第一节介绍了基本的术语和记号，然后讨论了一些特别有用的不等式，如半可加不等式和凸函数的一些性质。最后两节涉及测度论的概念，它在分形几何理论中发挥了重要的作用。本章中只概述了测度论的基础部分，然后就弱收敛作了略为详细的讨论，这或许是一个大家较不熟悉的论题。

## 1.1　集合和函数

首先，提出一些在本书中将要经常遇见的标准数学定义和符号。

通常，用记号$\mathbb{R}$表示实数集，$\mathbb{Z}$为整数集，$\mathbb{Q}$为有理数集，用$\mathbb{R}^+$，$\mathbb{Z}^+$和$\mathbb{Q}^+$表示它们相应的正子集。

一般，研究工作是在$n$维欧几里德空间$\mathbb{R}^n$上进行，其中$\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$正好是实数轴，而$\mathbb{R}^2$是欧几里德平面。$\mathbb{R}^n$中的点记为小写字母$x$，$y$等，$x+y$表示$x$和$y$的(向量)和，$\lambda x$为$x$乘以实数$\lambda$。通常使用的是$\mathbb{R}^n$上的欧几里德距离或度量，于是点$x,y\in\mathbb{R}^n$间的距离是$|x-y|=\left(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}$，这里$x,y$的坐标形式分别为$x=(x_1,\cdots,x_n)$和$y=(y_1,\cdots,y_n)$。

一般用大写字母$A$, $E$, $X$, $Y$等表示$\mathbb{R}^n$的子集。一个非空集合$X$的直径由$|X|=\sup\{|x-y|: x,y\in X\}$给出，按约定$|\varnothing|=0$。非空集合$X$和$Y$间的距离记作$\mathrm{dist}(X,Y)=\inf\{|x-y|: x\in X, y\in Y\}$。对$r>0$，一个集合$X$的$r$-邻域或$r$-平行体由下式给出：

$$X_r=\left\{y:\inf_{x\in X}|x-y|\leqslant r\right\}$$

定义中心在 $x\in\mathbb{R}^n$ 半径为 $r>0$ 的闭球和开球分别为

$$B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n:|y-x|\leqslant r\}$$

和

$$B^0(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n:|y-x|<r\}$$

当然，$\mathbb{R}^1$ 中的球就是区间，$\mathbb{R}^2$ 中的球是圆。如果一个集合 $X\subset\mathbb{R}^n$ 满足 $X\subset B(x,r)$,则称 $X$ 是有界的，于是一个非空集合 $X$ 是有界的当且仅当 $|X|<\infty$。

开集和闭集由通常的方法定义。称一个集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是开的，如果对任意 $x\in A$,存在 $r>0$ 使 $B(x,r)\subset A$。如果集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ 包含了其本身的所有极限点，即如果 $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ 是 $A$ 中点构成的收敛于 $x\in\mathbb{R}^n$ 的序列，那么必有 $x\in A$, 则称集合 $A$ 是闭的。集合 $A$ 是开的当且仅当它的补集是闭的。一个集合 $A$ 的内部，记作 $\text{int}A$, 是 $A$ 所有开子集的并集。$A$ 的闭包，记为 $\overline{A}$, 是所有包含 $A$ 的闭集的交集。$A$ 的边界定义为 $\partial A=\overline{A}\setminus\text{int}A$。

如果每个覆盖集合 $A$ 的开集族都存在覆盖 $A$ 的有限子族，则称 $A$是紧的。$\mathbb{R}^n$ 的一个子集 $A$ 是紧集当且仅当它是闭的且有界，也许这也可以作为 $\mathbb{R}^n$ 的子集紧性的定义。

由开集或闭集的并或者交这样构造集合的思想引出了波雷尔集的概念，$\mathbb{R}^n$ 的波雷尔子集族形式上是满足下列条件的集合的最小族：

(a) 每一个开集是波雷尔集，每一个闭集也是波雷尔集。

(b) 如果 $A_1, A_2, \cdots$ 是任意可数个波雷尔集组成的集族，那么 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$、$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$ 和 $A_1\setminus A_2$ 也是波雷尔集。

任何初始是由开集或闭集构造的集合，经过有限次的可数并或交后仍是一个波雷尔集，实际上，本书涉及的 $\mathbb{R}^n$ 的所有子集都是波雷尔集。

偶尔使用符号 # 表示一个集合点 (通常是有限个)的个数。

$f:X\to Y$ 通常表示一个函数或映射 $f$, $X$ 为它的定义域，$Y$

为它的值域或上域。如果当 $x_1 \neq x_2$ 时，$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 $f$ 是一个单射或 1－1 的；如果 $f(X)=Y$，则称 $f$ 是一个满射或映上的。如果 $f$ 同时是单射和满射，则称 $f$ 是双射或 1－1 对应的。如果 $f:X \to Y$ 和 $g:Z \to W$，这里 $Y \subset Z$，定义 $f$ 与 $g$ 的复合 $g \circ f:X \to W$，$(g \circ f)(x)=g(f(x))$。对 $f:X \to X$，定义 $f$ 的第 $k$ 次迭代为 $f^k:X \to X$，满足 $f^0(x)=x$，$f^k(x)=f(f^{k-1}(x))$，$k=1,2,3,\cdots$，那么 $f^k$ 是 $f$ 与它自己的 $k$ 次复合。对双射 $f:X \to Y$，$f$ 的逆是函数 $f^{-1}:Y \to X$，满足对所有 $x \in X$ 有 $f^{-1}(f(x))=x$，和对所有的 $y \in Y$ 有 $f(f^{-1}(y))=y$。

对 $A \subset X$，函数 $1_A: X \to \{0,1\}$ 满足：$x \notin A$，$1_A(x)=0$ 和 $x \in A$，$1_A(x)=1$，$1_A$ 称为 $A$ 的示性函数或特征函数，它的值"显示"了点 $x$ 是否在集合 $A$ 中。

某些函数类需特别注意。记 $C(X)$ 为连续函数 $f:X \to \mathbb{R}$ 的向量空间，$C_0(X)$ 为具有有界支撑的连续函数的子空间（$f:X \to \mathbb{R}$ 的支撑是指除 $f(x)=0$ 以外的 $X$ 的最小闭子集）。对一个合适的定义域 $X \subset \mathbb{R}^n$，记 $C^1(X)$ 为有连续导数的函数 $f:X \to \mathbb{R}$ 的空间，$C^2(X)$ 为那些具有二阶连续导数的函数空间。与分形有着特别联系的是李卜希兹函数。对函数 $f:X \to \mathbb{R}^m$，如果存在一个数 $c$，满足对任意 $x, y \in X$，

$$|f(x)-f(y)| \leqslant c\,|x-y| \tag{1.1}$$

则称 $f$ 为一个李卜希兹函数。使上不等式成立的 $c$ 的下确界称为 $f$ 的李卜希兹常数，记为 $\mathrm{Lip}f$。对适当的 $m$，也记 $\mathrm{Lip}X$ 为从 $X$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的李卜希兹函数空间。

形如 $\lim_{k\to\infty}a_k=a$ 或 $\lim_{x\to 0}f(x)=a$ 的式子总是意味着极限存在，同时取表示出的极限值。

对描述函数的极限行为有一些有用的约定。对 $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，$f(x)=o(g(x))$ 表示当 $x \to \infty$ 时，$f(x)/g(x) \to 0$，$f(x)=O(g(x))$ 表示当 $x \to \infty$ 时 $f(x)/g(x)$ 保持有界。类似地，如 $f(x)/g(x) \to 1$

记为 $f(x) \sim g(x)$。对所有 $x \in \mathbb{R}^+$，如果存在数 $c_1$、$c_2$ 满足 $0 < c_1 \leqslant f(x)/g(x) \leqslant c_2 < \infty$，记为 $f(x) \asymp g(x)$。偶尔有记号 $f(x) \simeq g(x)$，用于不太严格地表示对较大的 $x$，$f(x)$ 与 $g(x)$“粗略可比”。对其它定义域上的函数和 $x$ 趋近于另外极限值的情形，则可以用明显的方法改写上述记号。

## 1.2 一些有用的不等式

下面讨论一些简单但非常有用的不等式。

半可加序列非常频繁地出现在一般分析和分形几何，特别是动力系统中。一个实数序列 $(a_k)_{k=1}^{\infty}$，如果对任意的 $k, m \in \mathbb{Z}^+$ 满足不等式

$$a_{k+m} \leqslant a_k + a_m \tag{1.2}$$

则称为具有半可加性。这样一个序列的基本性质是 $(a_k/k)_{k=1}^{\infty}$ 是收敛的。

**命题 1.1**

设 $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ 是一个半可加序列，那么 $\lim_{k\to\infty} a_k/k$ 存在且等于 $\inf_{k\geqslant 1} a_k/k$（也许是一个实数 或 $-\infty$）。

**证明** 给定一个正整数 $m$，任何整数 $k$ 可以写成形式 $k = qm + r$，这里 $q \in \mathbb{Z}$，$0 \leqslant r \leqslant m-1$。对 $k \geqslant m$，应用式 (1.2) $q$ 次，得

$$\frac{a_k}{k} = \frac{a_{qm+r}}{qm+r} \leqslant \frac{q a_m + a_r}{qm} = \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{qm}$$

因 $k \to \infty$，故 $q \to \infty$，得到

$$\limsup_{k\to\infty} a_k/k \leqslant a_m/m$$

上式对所有 $m \in \mathbb{Z}^+$ 都正确，故 $\limsup_{k\to\infty} a_k/k \leqslant \inf_k a_k/k$。即证得了极限存在且等号成立。□

**系 1.2**

设 $b$ 是一个实数，使 $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ 对所有 $k, m=1,2,\cdots$, $a_{k+m}\leqslant a_k+a_m+b$ 成立，则 $a\equiv\lim_{k\to\infty}a_k/k$ 存在，且对所有 $k$ 有 $a_k\geqslant ka-b$。

**证明** 首先，$(a_{k+m}+b)\leqslant(a_k+b)+(a_m+b)$ 成立，故应用命题 1.1 到序列 $(a_k+b)_{k=1}^{\infty}$ 上，即得 $\lim_{k\to\infty}a_k/k=\lim_{k\to\infty}(a_k+b)/k=\inf_{k\geqslant 1}(a_k+b)/k$。记 $a$ 为这个极限值，则对任意 $k$, $a\leqslant(a_k+b)/k$ 成立。□

同样，一个正实数序列 $(b_k)_{k=1}^{\infty}$, 如果对任意 $k, m\in\mathbb{Z}^+$ 有 $b_{k+m}\leqslant b_k b_m$, 称该序列是半可乘的。

**系 1.3**

设 $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ 是一个半可乘序列，那么 $\lim_{k\to\infty}(b_k)^{1/k}$ 存在且等于 $\inf_{k\geqslant 1}(b_k)^{1/k}$。

**证明** 序列 $a_k=\log b_k$ 是半可加的，由命题 1.1, $\log b_k^{1/k}=a_k/k$ 是收敛的，故 $b_k^{1/k}$ 是收敛的。□

接下来考虑一些与凸函数有关的不等式。设 $X\subset\mathbb{R}$ 是一个区间。函数 $\psi: X\to\mathbb{R}$, 如果对任意 $x_1, x_2\in X$ 及任意满足 $\alpha_1+\alpha_2=1$ 的正数 $\alpha_1$, $\alpha_2$:

$$\psi(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leqslant\alpha_1\psi(x_1)+\alpha_2\psi(x_2) \tag{1.3}$$

则称 $\psi$ 是凸的；几何上这意味着 $\psi$ 的图的每一条弦都在图的上方（图 1.1）。如果 $\psi$ 是二阶连续可导函数，那么 $\psi$ 是凸的当且仅当对任意 $x\in X$, $\psi''(x)\geqslant 0$ 成立。如果不等式(1.3) 对任意 $x_1\neq x_2$ 严格成立，则函数 $\psi$ 是严格凸的。如果对任意 $x\in X$, $\psi''(x)>0$, 则 $\psi$ 是严格凸的。函数 $\psi$: $X\to\mathbb{R}$, 如 $-\psi$ 是凸的，则称 $\psi$ 是凹的。

凸性条件(1.3) 蕴涵了一个熟悉的含有更多项的不等式，即众所周知的 Jensen 不等式。

命题 1.4

设 $\psi$: $X \to \mathbb{R}$ 是凸的，$x_1,\cdots,x_m \in X$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m>0$ 且满足 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1$，那么

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\psi(x_i) \tag{1.4}$$

如果 $\psi$ 是严格凸的，则当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_m$ 时等式成立。

**证明** 对 $m\geqslant 3$，用归纳法的步骤证明。由式(1.3)可得

$$\begin{aligned}\psi\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right) &= \psi\left((1-\alpha_m)\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i(1-\alpha_m)^{-1}x_i+\alpha_m x_m\right) \\ &\leqslant (1-\alpha_m)\psi\left(\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i(1-\alpha_m)^{-1}x_i\right)+\alpha_m\psi(x_m)\end{aligned} \tag{1.5}$$

因为 $\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i(1-\alpha_m)^{-1}=1$，故式(1.4)由关于 $m-1$ 的不等式推得。

如果 $\psi$ 是严格凸的，那么式(1.5)中的等式蕴涵 $x_m=\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i(1-\alpha_m)^{-1}x_i$，即 $x_m=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i$。通过重新编号，可以将任何 $x_i$ 看作“$x_m$”；于是式(1.4)中的等式蕴涵对任意 $k$ 有 $x_k=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i$。□

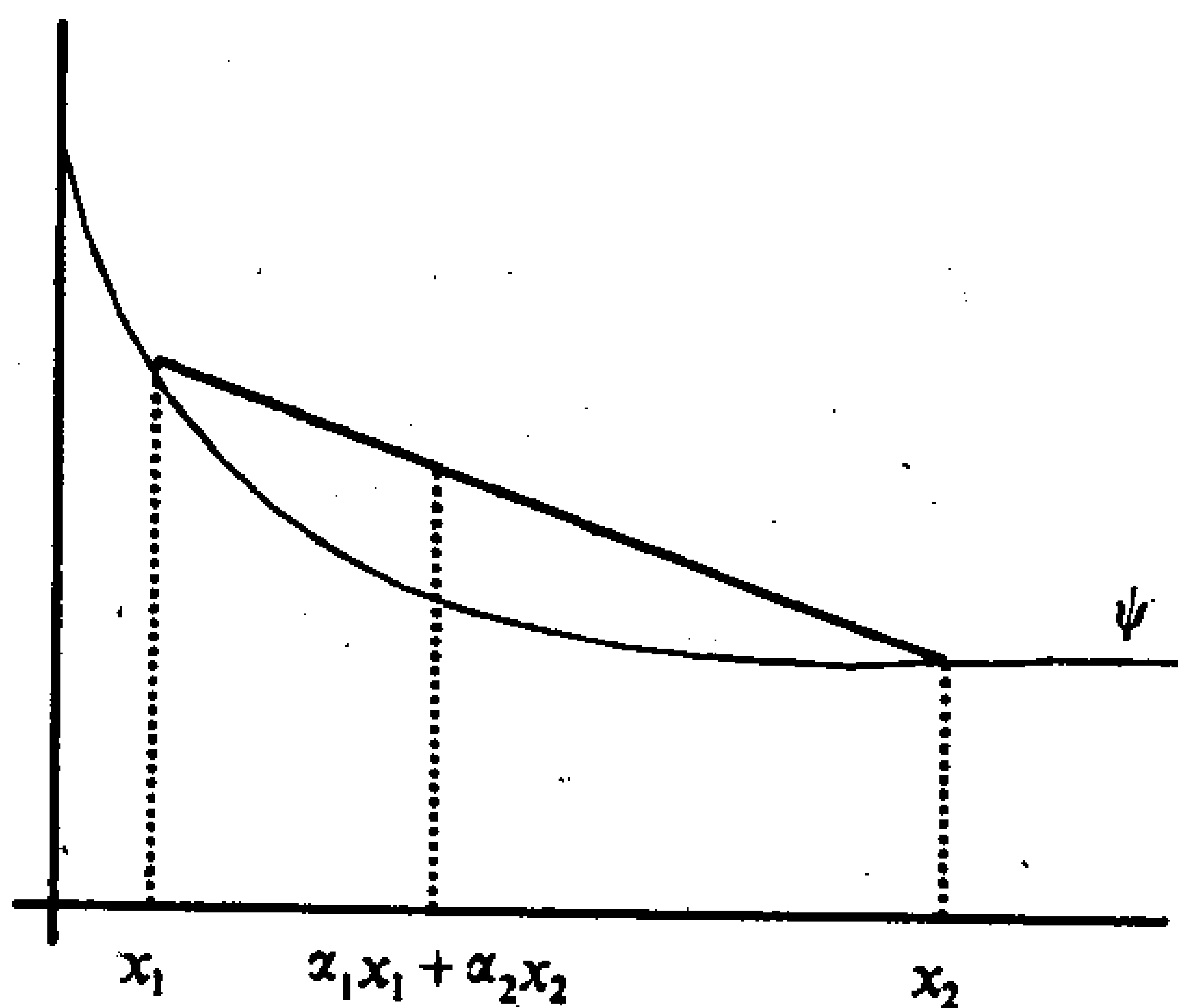



图 1.1 凸函数 $\psi$ 的图

注意如果 $\psi: X \to \mathbb{R}$ 是一个凹函数，则成立与式(1.4)相反的不等式。

在式(1.4)中适当选取$\psi$，可得出著名的算术-几何平均不等式，参看练习 1.2。

下面的应用对第 5 章中与熵有关的内容特别重要。这里我们约定 $0\log 0 = 0$。

**系 1.5**

设 $p_1,\cdots,p_m$ 是"概率"，满足对任意 $i$，$p_i \geqslant 0$ 及 $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$。设 $q_1,\cdots,q_m$ 是实数，那么

$$\sum_{i=1}^{m} p_i(-\log p_i + q_i) \leqslant \log \sum_{i=1}^{m} e^{q_i} \tag{1.6}$$

其中等号成立当且仅当对所有的 $i$，$p_i = e^{q_i} / \sum_{j=1}^{m} e^{q_j}$。

**证明** 定义 $\psi(x) = x\log x$ $(x>0)$，$\psi(0)=0$。因为对 $x>0$，$\psi''(x)>0$，故 $\psi: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是一个连续的严格凸函数。为方便起见，记 $s = (\sum_{j=1}^{m} e^{q_j})^{-1}$。应用式(1.4)，其中 $\alpha_i = se^{q_i}$，$x_i = p_i/e^{q_i}$，则

$$\psi(s) = \psi\left(\sum_{i=1}^{m}(se^{q_i})(p_i/e^{q_i})\right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} se^{q_i}\psi(p_i/e^{q_i})$$

于是

$$s\log s \leqslant \sum_{i=1}^{m} se^{q_i}p_i e^{-q_i}\log(p_i/e^{q_i})$$

$$= s\sum_{i=1}^{m} p_i(\log p_i - q_i),$$

这就是式(1.6)。当$\psi$是严格凸时，等式成立需要满足 $p_i/e^{q_i} = c$，这里 $c$ 不依赖于 $i$，且 $1 = \sum_{i=1}^{m} p_i = c\sum_{i=1}^{m} e^{q_i}$。□

## 1.3 测 度

测度或"质量分布"是分形几何的核心部分。它们在分形的数学中是一个主要的工具，此外，测度能显示出可以用它自己的方式研究的分形特征。测度基本上是把集合数值化的一种方法，它使"整个是部分的和"的原理得到了应用。这样，如果用一种合理的方法将一个集合分成有限或可数个部分，那么整个集合的测度就是这些部分的测度之和。测度常常被认为是一种"质量分布"或"负荷分布"，这种解释也许对那些对正规的测度论不太熟悉的人是有帮助的。

在本书中，总是力求减少测度论的多方面技巧。由于我们仅研究定义在 $\mathbb{R}^n$ 的子集上的测度，可以避开那些发生在更一般拓扑背景下的不熟悉的测度特征。这里，给出了测度的一个正式的定义来保证其精确性，但也许更重要的是使读者对测度的性质有一个直观的感觉。

设 $X\subset\mathbb{R}^n$，如果 $\mu$ 取非负值，也可取 $\infty$，对 $X$ 的每个子集满足，

(a) $\mu(\emptyset)=0$， (1.7)

(b) 如果 $A\subset B$，那么 $\mu(A)\leqslant\mu(B)$， (1.8)

(c) 如果 $A_1,A_2,\cdots$ 是一个可数的集序列，那么

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) \tag{1.9}$$

则称 $\mu$ 是 $X$ 上的测度。于是(a) 要求空集有零测度，(b) 表示"大的集合有大一些的测度"，性质(c) 保证了任何集的测度都不会比它的任何可数分割部分的测度和更大。使一个测度有用还需要更多的条件，即对"好的"不交集 $A_i$，式(1.9) 的等号成立。这就引出了可测性概念。

给定一个测度 $\mu$，如果存在 $X$ 的一族子集，使 $\mu$ 在其上表现出好的加法方式：即如果集合 $A\subset X$，对任意 $E\subset X$ 都满足

$$\mu(E)=\mu(E\cap A)+\mu(E\backslash A) \tag{1.10}$$

则称 $A$ 是 $\mu$-可测的（或者当使用的测度很明确时，只称为可测的）。记 $\mathcal{M}$ 是可测集族，它总是构成 $\sigma$-域，即 $\phi\in\mathcal{M}$，且如果 $A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{M}$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{M}$，$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{M}$ 及 $A_1\backslash A_2\in\mathcal{M}$。对于适当定义的测度，$\mathcal{M}$ 将是一个非常大的集族，特别它将是包含波雷尔集的 $\sigma$-域。

命题 1.6

设 $\mu$ 是 $X$ 上的测度，$\mathcal{M}$ 是 $X$ 的所有 $\mu$-可测的子集族。

(a) 如果 $A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{M}$ 是不交的，则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) \tag{1.11}$$

(b) 如果 $A_1\subset A_2\subset\cdots$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一列不降的集序列，则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{i\to\infty}\mu(A_i) \tag{1.12}$$

(c) 如果 $A_1\supset A_2\supset\cdots$ 是 $\mathcal{M}$ 中一列不增的集序列，及 $\mu(A_1)<\infty$，则

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{i\to\infty}\mu(A_i) \tag{1.13}$$

连续性质(b)和(c)由(a)容易得到。性质(a)是测度的一个决定性的性质，即 $\mu$ 在一些大的集族 $\mathcal{M}$ 的不交集上具有可加性。对我们遇见的所有测度，$\mathcal{M}$ 均包含波雷尔集，然而一般的 $\mathcal{M}$ 不会包含 $X$ 的所有子集，对任意的不交集 $A_1,A_2,\cdots$ (a)也不会成立。

（技术注记：这里所讲的“测度”就是在一般的测度论课本中的“外测度”。那些书中仅在某些 $\sigma$-域 $\mathcal{M}$ 的集合上定义测度 $\mu$，

使$\mathcal{M}$的集满足式(1.7)-(1.9),且如果 $A_i$是$\mathcal{M}$中的不交集,则式(1.9)的等号成立。然而,$\mu$可以通过定义 $\mu(A)=\inf\{\sum_i \mu(A_i): A\subset\bigcup_i A_i,\ A_i\in\mathcal{M}\}$ 扩张到所有 $A\subset X$ 上。在涉及豪斯道夫测度等问题的研究中,在一开始就假设测度是定义在所有集合上还是比较方便的。)

本书涉及的是$\mathbb{R}^n$上,或$\mathbb{R}^n$的子集上,且在波雷尔子集上有良好性态的测度。$X\subset\mathbb{R}^n$,如果$X$的波雷尔子集都是$\mu$-可测的,则称测度$\mu$是$X$上的波雷尔测度。可以证明,$\mu$是波雷尔测度当且仅当对任意满足 $\mathrm{dist}(A,B)>0$ 的 $X$ 的子集 $A,B$,

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B) \tag{1.14}$$

称波雷尔测度$\mu$为波雷尔规则的,如果$X$的任一子集都包含在一个与之具有相同测度的波雷尔集内。对这样的测度,利用在波雷尔集上的工作,就可以达到我们实际要达到的全部目的。

实际上,在本书中将遇到的所有测度(包括豪斯道夫测度和填充测度)都是$\mathbb{R}^n$上或它的适当子集上的波雷尔规则测度。因此,为了避免乏味的重复,约定在书中出现的“测度”都意味着是“波雷尔规则测度”。于是,对本书的目的,这样的测度是一个相对于波雷尔集具有良好性态的集函数。为避免平凡情形,对所有的测度$\mu$均假设$\mu(X)>0$。

$X$上满足$\mu(X)<\infty$的测度$\mu$称为有限的;如果对每个有界集$A$有$\mu(A)<\infty$,则称$\mu$是局部有限的。如果$\mu(X)=1$,则称$\mu$为一个概率测度(这个标准术语并不意味着要把$\mu$与概率联想在一起)。

如果$\mu$是一个局部有限(波雷尔规则)测度,则集合的测度能够按下面的意义用紧集和开集的测度来逼近:对任一非空开集$U$,

$$\mu(U)=\sup\{\mu(A): A\subset U,\ A\text{ 是紧集}\} \tag{1.15}$$

和对任一集合$E$,

$$\mu(E)=\inf\{\mu(U): E\subset U,\ U \text{是开集}\} \tag{1.16}$$

参见练习 1.5。

$\mu$ 的支撑，记为 spt$\mu$,是补集的测度为 0 的最小闭集，即

$$\mathrm{spt}\mu = X\setminus\bigcup\{U: U \text{是开集},\ \mu(U)=0\}$$

下面列出一些基本测度的例子。

(1) 任意 $A\subset\mathbb{R}^n$, 设 $\mu(A)$ 是 $A$ 中点的个数(可以是 $\infty$), 这是 $\mathbb{R}^n$ 上的计数测度。

(2) 对给定 $a\in\mathbb{R}^n$, 如 $a\notin A$, 令 $\mu(A)=0$, 如 $a\in A$, 令 $\mu(A)=1$, 那么 $\mu$ 被认为是单位质量集中在 $a$ 的以 $\{a\}$ 为支撑的测度.

(3) $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度是对具有"$n$ 维体积"的一大类集族的自然推广($n=1$ 为"长度", $n=2$ 为"面积", $n=3$ 为"体积")。定义"坐标平行体" $A=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n: a_i\leqslant x_i\leqslant b_i\}$ 的 $n$ 维体积为

$$\mathrm{vol}^n(A)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$$

那么 $n$ 维勒贝格测度 $\mathcal{L}^n$ 定义为

$$\mathcal{L}^n(A)=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{vol}^n(A_i): A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\},$$

这里的下确界是对 $A$ 的所有可数平行体覆盖取的。经过一些努力就可以证明 $\mathcal{L}^n$ 确实是 $\mathbb{R}^n$ 上的(波雷尔规则)测度，且如果 $A$ 是一个平行体或者用通常的测量法则可以计算体积的其它任何集合，$\mathcal{L}^n(A)$ 等于 $A$ 的 $n$ 维体积。

(4) 设 $\mu$ 是 $X$ 上的测度，$E\subset X$, $\mu$ 在 $E$ 上的限制，记为 $\mu|_E$, 对任意 $A\subset X$, 定义如下：

$$\mu|_E(A)=\mu(A\cap E) \tag{1.17}$$

容易验证，每一个 $\mu$- 可测集都是 $\mu|_E$- 可测的，且只要 $E$ 是可测的及 $\mu(E)<\infty$, 则 $\mu$ 一定是(波雷尔规则)测度。

(5) 定义测度的一个非常有用的方法是反复细分。见图 1.2。对 $m\geqslant 2$, 取 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集系统，用序列 $\{(i_1,\cdots,i_k): k\geqslant 0$, 对每个 $j$, $1\leqslant i_j\leqslant m\}$ 来标记. 对任意 $(i_1,\cdots,i_k)$, 设 $X_{i_1,\cdots,i_k}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的

一个有界非空的闭子集，记 $\mathcal{E}$为所有这样的集合组成的集族。假设这些集合是嵌套状的，所以

$$X_{i_1,\cdots,i_k} \supset \bigcup_{i=1}^{m} X_{i_1,\cdots,i_k,i} \tag{1.18}$$

（虽然并不需要，但通常上式是不交并）。任意$(i_1,\cdots i_k)$，对 $X_{i_1,\cdots,i_k}\in\mathcal{E}$，设 $\mu(X_{i_1,\cdots,i_k})<\infty$，且按下面的方法定义：

$$\mu(X_{i_1,\cdots,i_k}) = \sum_{i=1}^{m}\mu(X_{i_1,\cdots,i_k,i}) \tag{1.19}$$

即"质量"$\mu(X_{i_1,\cdots,i_k})$ 在子集 $X_{i_1,\cdots,i_k,i}(1\leqslant i\leqslant m)$ 之间分配。假定对每一个序列 $(i_1, i_2,\cdots)$，集合的直径 $|X_{i_1,\cdots,i_k}|$ 和它的测度 $\mu(X_{i_1,\cdots,i_k})$ 当 $k\to\infty$ 时都趋近于 0，对每个 $k$，记 $E_k=\bigcup_{i_1,\cdots,i_k} X_{i_1,\cdots,i_k}$ 和 $E=\bigcap_{k=0}^{\infty}E_k$，故 $E$ 是一个递减的闭的非空集序列的交集，因此也是闭的和非空的。对 $A\subset\mathbb{R}^n$，定义

$$\mu(A)=\inf\left\{\sum_i\mu(V_i): A\cap E\subset\bigcup_i V_i,\ V_i\in\mathcal{E}\right\} \tag{1.20}$$

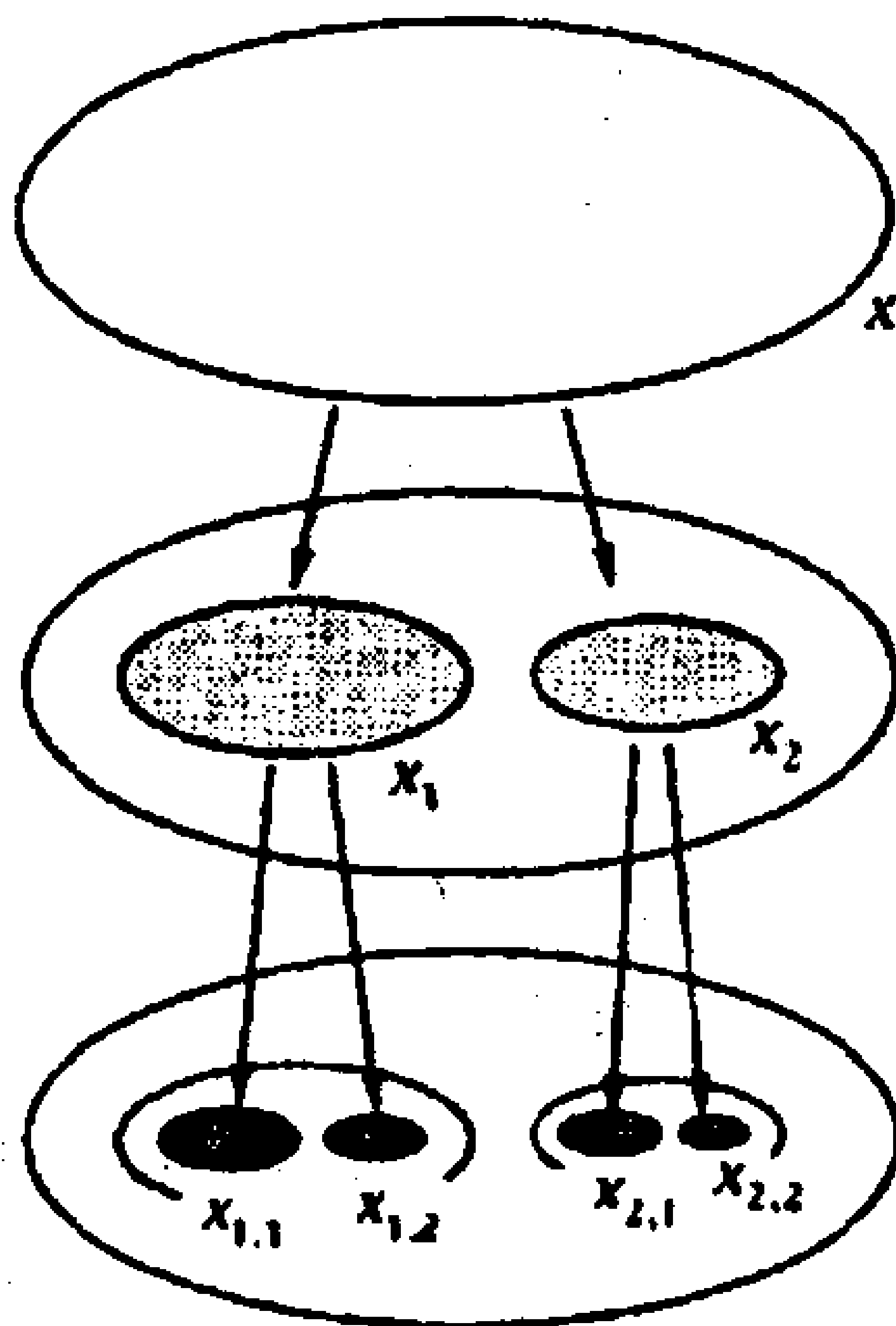



图 1.2 测度 用反复细分方法的构造过程。在嵌套状的结构中，$\mathcal{E}$的每个集合上的测度都在它的子集间进行分配

不难证明 $\mu$ 是一个支撑包含在 $E$ 内的测度，且满足对任意 $(i_1,\cdots i_k)$, $\mu(X_{i_1,\cdots,i_k})$ 具有预先分配的值。于是如果 $\mu$ 是由这种“反复细分”程序定义的，它就能扩张为 $E$ 上的测度。

有关这个构造过程的一个简单的例子是，设 $m=2$, 对每个 $k$, 所有的 $X_{i_1,\cdots,i_k}$ 构成了 $2^k$ 个长度各为 $2^{-k}$ 的[0,1] 上闭的二进子区间的集合，用显然的方法细分下去。对每一个这样的子 区间，取 $\mu(X_{i_1,\cdots,i_k})=2^{-k}$, 则容易验证式(1.19) 成立，且式(1.20) 定义了勒贝格测度在[0,1] 上的限制。

如果使某一性质不成立的集合具有的 $\mu$-测度为 0 ,则称对几乎所有的 $x$ 或几乎处处( 关于测度 $\mu$) 该性质成立。例如，几乎所有的实数关于勒贝格测度来说是无理数。

偶尔会用到下面的密度 结论，其大意是说，从测度的观点来看，集合 $E$ 的几乎所有的点“均在”$E$ 中。如果在点 $x$ 上，式(1.21) 成立，则称它是 $E$ 的一个密度点。

**命题 1.7**

设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$上的局部有限波雷尔测度,那么对每一个$\mu$-可测集$E$,

$$\lim_{r\to 0}\mu(E\cap B(x,r))/\mu(B(x,r)) \tag{1.21}$$

存在，且对 $\mu$-几乎所有的 $x\in E$, 极限值为 1, 而对 $\mu$-几乎所有的 $x\notin E$，极限值为 0。

**证明** 由于这是一个局部结果，故可以假设 $\mu$ 是有限测度。取 $c<1$, 定义

$$A=\{x\in E: \text{对任意小的 } r,\ \mu(E\cap B(x,r))<c\mu(B(x,r))\};$$

下面证明 $\mu(A)=0$。给定 $\varepsilon>0$ ，存在一个开集 $U\supset A$, 满足 $\mu(U)<\mu(A)+\varepsilon$. 定义球族 $\mathcal{V}$ 为：

$$\mathcal{V}=\{B: B \text{的中心在 } A \text{ 中}, B\subset U, \mu(E\cap B)<c\mu(B)\}$$

则 $\mathcal{V}$是 $A$ 的一个 Vitali 覆盖，即对任意 $x\in A$ 及 $\delta>0$, 都存在

$\mathcal{V}$中的一个中心在$x$,半径小于$\delta$的球。Vitali 覆盖定理表明,在$\mathcal{V}$中存在不交球序列$B_1,B_2,\cdots$满足$\mu(A\setminus\bigcup_i B_i)=0$,那么

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\mu(A\cap\bigcup_i B_i)+\mu(A\setminus\bigcup_i B_i)\\&=\sum_i\mu(A\cap B_i)+0\leqslant c\sum_i\mu(B_i)\\&=c\mu(\bigcup_i B_i)\leqslant c\mu(U)<c(\mu(A)+\varepsilon)\end{aligned}$$

上式对任意$\varepsilon>0$都成立,所以$\mu(A)\leqslant c\mu(A)$,即得$\mu(A)=0$。于是,可以断言,对充分小的$r$,及任意$c<1$,对$\mu$-几乎所有的$x\in E$,$c\mu(B(x,r))\leqslant\mu(E\cap B(x,r))\leqslant\mu(B(x,r))$。即对$\mu$-几乎所有的$x\in E$极限(1.21)成立且等于1。

将上述关于$E$的论证过程应用于$\mathbb{R}^n\setminus E$,可得 对$\mu$-几乎所有的$x\notin E$,式(1.21)等于0。□

有时在同一个集合上要考虑几种测度,对$X$上的测度$\mu$和$\nu$,如果存在数$c_1,c_2>0$,使对任意$A\subset X$,

$$c_1\mu(A)\leqslant\nu(A)\leqslant c_2\mu(A)\tag{1.22}$$

则称$\mu$和$\nu$是等价的。

$X$上关于测度$\mu$的积分是按通常步骤定义的。一个简单函数$f:X\to\mathbb{R}$是指下面形式的函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i 1_{A_i}(x)$$

其中$a_1,\cdots,a_k\in\mathbb{R}$, $A_1,\cdots,A_k$是$\mu$-可测集,$1_{A_i}$为$A_i$的示性函数。定义简单函数$f$关于$\mu$的积分为

$$\int f\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{k}a_i\mu(A_i)$$

更一般函数的积分是由简单函数的逼近来定义的。如果对任意$c\in\mathbb{R}$,集合$\{x\in X:f(x)<c\}$是可测集,则称$f:X\to\mathbb{R}$是一个可测函数(特别对波雷尔测度$\mu$,所有连续函数都是可测的)。定义一

个可测函数 $f:X\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ 的积分为：

$$\int f\mathrm{d}\mu=\sup\left\{\int g\,\mathrm{d}\mu : g \text{ 是简单函数}, 0\leqslant g\leqslant f\right\}$$

(这个积分值也可能为无限)。最后，对一个可测函数 $f:X\to\mathbb{R}$，记 $f_+(x)=\max\{f(x),0\}$，$f_-(x)=\max\{-f(x),0\}$，而当 $\int f_+\mathrm{d}\mu$ 和 $\int f_-\mathrm{d}\mu$ 均有限时，定义

$$\int f\mathrm{d}\mu=\int f_+\mathrm{d}\mu-\int f_-\mathrm{d}\mu$$

如果 $\int|f|\mathrm{d}\mu=\int f_+\mathrm{d}\mu+\int f_-\mathrm{d}\mu<\infty$，这样的函数 $f$ 称为 $\mu$-可积。所有常用的积分性质都成立，例如 $\int(f+g)\mathrm{d}\mu=\int f\mathrm{d}\mu+\int g\mathrm{d}\mu$ 和 $\int(\lambda f)\mathrm{d}\mu=\lambda\int f\mathrm{d}\mu$($\lambda$ 实数)。

对一个可测集 $A$，定义 $A$ 上的积分为 $\int_A f\mathrm{d}\mu=\int f1_A\mathrm{d}\mu$。

一些基本的收敛定理也成立，这些定理叙述的是保证

$$\lim_{k\to\infty}\int f_k\mathrm{d}\mu=\int f\mathrm{d}\mu \tag{1.23}$$

成立的条件，其中 $f_k:X\to\mathbb{R}$ 是对几乎所有的 $x$，满足 $\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$ 的函数序列。一种情况是$(f_k)$为非负函数的单调序列(单调收敛定理)，或者 $\mu(X)<\infty$ 且对任意的 $k$ 及 $x\in X$，存在 $c$ 使 $|f_k(x)|\leqslant c$（有界收敛定理)，还有一种情况极限式(1.23)也成立，这就是如果存在函数 $g:X\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$，满足 $\int g\mathrm{d}\mu<\infty$ 及对任意 $k$ 和 $x$，$|f_k(x)|\leqslant g(x)$（控制收敛定理)。

与本节有密切联系的还有 Fatou 引理，即对任意可测函数序列$(f_k)$，

$$\int\liminf_{k\to\infty}f_k\mathrm{d}\mu\leqslant\liminf_{k\to\infty}\int f_k\mathrm{d}\mu$$

我们常常希望在二重积分中能够交换积分次序，这个通常可以利用 Fubini 定理。如果 $\mu$ 和 $\nu$ 是欧几里德空间子集上的局部有限测度，那么对连续函数 $f:X\times Y\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$:

$$\int\left(\int f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)=\int\left(\int f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)$$

（如果 $f$ 是一个波雷尔函数，即对所有实数 $c$，$\{(x,y):f(x,y)<c\}$ 是 $X\times Y$ 的波雷尔子集，则上式也同样成立）。

积分通常可以用不同的记号表示，根据不同的侧重要求可写成 $\int f\mathrm{d}\mu$，$\int f$ 或者 $\int f(x)\mathrm{d}\mu(x)$。当 $\mu$ 是 $n$ 维勒贝格测度 $\mathcal{L}^n$ 时，通常用 $\int f\mathrm{d}x$ 或 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 代替 $\int f\mathrm{d}\mathcal{L}^n(x)$。

记 $\mathcal{L}^1(\mu)$ 为 $\mu$-可积函数的向量空间，即函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 满足 $\int|f|\mathrm{d}\mu<\infty$，$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ 为勒贝格可积函数，即 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $\int|f|\mathrm{d}\mathcal{L}<\infty$。

## *1.4 测度的弱收敛

这里集中叙述一些有关测度弱收敛的性质，主要在第9章中要用到。本节仅涉及需要用到的性质。作为一种选择，初次阅读时可以略过证明不看，当然这可能会有点不利于对本论题的体会。

设 $\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的局部有限测度，如果

$$\lim_{k\to\infty}\int f\mathrm{d}\mu_k=\int f\mathrm{d}\mu \tag{1.24}$$

对任意 $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$（即对紧支撑的任意连续函数 $f$）成立，则称序列 $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ 弱收敛到 $\mu$，记为 $\mu_k\to\mu$ 或 $\lim_{k\to\infty}\mu_k=\mu$。

$\mathbb{R}$ 上的一个简单例子：如果 $\mu_k(A)=\dfrac{1}{k}\{\#i\in\mathbb{Z}:i/k\in A\}$，即 $\mu_k$ 是 $1/k$ 的点质量的总和，则 $\mu_k\to\mathcal{L}^1$。

尽管弱收敛不能保证对每一个集合 $A$ 都有 $\mu_k(A)\to\mu(A)$，但对开集或紧集仍成立一些有用的不等式。

**引理 1.8**

设$(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$是$\mathbb{R}^n$上满足$\mu_k\to\mu$的一个局部有限测度序列，如果$A$是紧的，则

$$\mu(A)\geqslant \limsup_{k\to\infty}\mu_k(A) \tag{1.25}$$

而如果$U$是开的，则

$$\mu(U)\leqslant \liminf_{k\to\infty}\mu_k(U) \tag{1.26}$$

**证明** 记$A_\delta^0=\{x:\operatorname{dist}(x,A)<\delta\}$为紧集$A$的开$\delta$-邻域，则当$\delta\searrow 0$时，$A_\delta^0\searrow A$，所以由式(1.13)，$\mu(A_\delta^0)\to\mu(A)$。于是对给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使$\mu(A_\delta^0)\leqslant\mu(A)+\varepsilon$。设$f\in C_0(\mathbb{R}^n)$是满足$0\leqslant f(x)\leqslant 1$的任意函数，且对$x\in A$，$f(x)=1$，而对$x\notin A_\delta^0$，$f(x)=0$（实际上可取$f(x)=\max\{0,1-\delta^{-1}\operatorname{dist}(x,A)\}$），那么

$$\mu(A)+\varepsilon\geqslant\mu(A_\delta^0)\geqslant\int f\,\mathrm{d}\mu=\lim_{k\to\infty}\int f\,\mathrm{d}\mu_k$$

$$\geqslant\limsup_{k\to\infty}\mu_k(A);$$

由于上式对任意小的$\varepsilon$都成立，即得式(1.25)。不等式(1.26)也可用式(1.12)类似证明。□

弱收敛的重要性在于下面的紧致性质，它使我们能从一般测度序列中选取出弱收敛子列。

**命题 1.9**

设$\mu_1,\mu_2,\cdots$是$\mathbb{R}^n$上的局部有限测度，且对任意有界集$A$，满足$\sup_k\mu_k(A)<\infty$，则$(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$有弱收敛的子序列。

***证明** 注意到$C_0(\mathbb{R}^n)$在范数$\|f\|_\infty=\max\{|f(x)|:x\in\mathbb{R}^n\}$下有一个可数稠密的函数子集$(f_k)_{k=1}^{\infty}$（例如，设$g_m(x)=\max\{0,\ m-|x|\}$，由 Weierstrass 逼近定理易见函数集合$\{pg_m: p$是一个有理系数的多项式，$m\in\mathbb{Z}^+\}$是可数的和稠密的）。

下面采用对角线法论证：对 $k$ 进行归纳法可得子序列$(\mu_{k,i})_{i=1}^{\infty}$，其中 $\mu_{0,i}=\mu_i$，而对 $k=1,2,\cdots$ $(\mu_{k,i})_{i=1}^{\infty}$ 是$(\mu_{k-1,i})_{i=1}^{\infty}$ 的子序列，使存在 $a_k\in\mathbb{R}$，当 $i\to\infty$ 时，$\int f_k\mathrm{d}\mu_{k,i}\to a_k$。于是对任意 $k$，当 $i\to\infty$ 时，$\int f_k\mathrm{d}\mu_{i,i}\to a_k$。由于$(f_k)$ 是稠的，即知对任意 $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$，存在 $a(f)\in\mathbb{R}$，使

$$\int f\mathrm{d}\mu_{i,i}\to a(f) \tag{1.27}$$

而且 $a$ 是线性的，即 $a(f+g)=a(f)+a(g)$ 和 $a(\lambda f)=\lambda a(f)$，且 $a$ 是有界的，即如果 $\operatorname{spt} f\subset A$，那么 $|a(f)|\leqslant(\sup_k\mu_k(A))\|f\|_{\infty}$。Riesz 表现定理表明在这些条件下，存在一个局部有限的测度 $\mu$，并对所有 $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$ 满足 $a(f)=\int f\mathrm{d}\mu$；于是由式(1.27) 知 $\mu_{i,i}\to\mu$，而$(\mu_{i,i})_{i=1}^{\infty}$是 $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ 的一个子序列。□

有时通过距离的收敛来表示测度的弱收敛会方便一些。对 $R>0$，定义 $\mathbb{R}^n$ 上的局部有限测度集上的 $d_R$ 为

$$d_R(\mu,\nu)=\sup\left\{\left|\int f\mathrm{d}\mu-\int f\mathrm{d}\nu\right|:f\in\operatorname{Lip}_R\right\} \tag{1.28}$$

这里 $\operatorname{Lip}_R$ 表示满足 $\operatorname{spt} f\subset B(0,R)$ 和 $\operatorname{Lip} f\leqslant 1$（即 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$，$x,y\in\mathbb{R}^n$）的李卜希兹函数 $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$的集合，那么对每个 $R$，$d_R$ 是一个伪距离(即它是非负的，对称的，满足三角不等式)，然而 $d_R(\mu,\nu)=0$ 并不能得到 $\mu=\nu$。虽然如此，$d_R$ 仍是支撑包含在开球 $B^0(0,R)$ 中的局部有限测度集上的距离，参见练习 1.10。显然，如果 $R_1\leqslant R_2$，则有 $d_{R_1}(\mu,\nu)\leqslant d_{R_2}(\mu,\nu)$。

**引理 1.10**

设 $\mu_1,\mu_2\cdots$ 和 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的测度，那么 $\mu_k$ 弱收敛到 $\mu$ 当且仅当对任意 $R>0$，$d_R(\mu_k,\mu)\to 0$。

***证明*** 首先假定对某个 $R$，$d_R(\mu_k,\mu)\not\to 0$，通过考虑子序列并用重新排序的方法，可知存在 $\varepsilon>0$和函数 $f_k\in\operatorname{Lip}_R$，使对任意的 $k$，

$|\int f_k d\mu_k - \int f_k d\mu| \geqslant \varepsilon$。由 Arzelà－Ascoli 定理，存在$(f_k)$的一个子序列，通过重新排序可以又一次得到整个序列，利用 $f_k$ 在 $B^c(0,R)$ 外等于零的性质，知在 $\mathrm{Lip}_R$ 上一定存在函数 $f$，一致地有 $f_k \to f$。于是

$$\int f d\mu_k - \int f d\mu = \left(\int f d\mu_k - \int f_k d\mu_k\right) + \left(\int f_k d\mu_k - \int f_k d\mu\right) + \left(\int f_k d\mu - \int f d\mu\right)$$

当 $k \to \infty$ 时，这个和的第一项趋于 0（由于 $f_k$ 一致收敛于 $f$ 及由式(1.25)知$(\mu_k(B(0,R)))_{k=1}^{\infty}$ 是有界的），第三项趋于 0（由于 $f_k$ 一致地收敛于 $f$），但是中间一项的绝对值有下界 $\varepsilon$，所以 $\mu_k$ 不弱收敛于 $\mu$。

反之，设对任意 $R>0$，$d_R(\mu_k,\mu) \to 0$，而 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是连续的，且 $\mathrm{spt} f \subset B(0,R)$，则对给定的 $\varepsilon>0$，存在李卜希兹函数 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使 $\mathrm{spt}\, g \subset B(0,R)$，且 $g$ 在下列意义下逼近 $f$，即对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，$|f(x)-g(x)|<\varepsilon$。（由中值定理，$g$ 可以任意充分地逼近 $f$，因 $f$ 是连续可微的）。那么利用三角不等式和 $g$ 有李卜希兹正和负的部分，如果 $k$ 充分大，由式(1.25)

$$\begin{aligned}\left|\int f d\mu_k - \int f d\mu\right| &\leqslant \int |f-g|\, d\mu_k + \left|\int g\, d\mu_k - \int g\, d\mu\right| + \int |g-f| d\mu \\ &\leqslant \varepsilon\mu_k(B(0,R)) + 2(\mathrm{Lip}\, g)\, d_R(\mu_k,\mu) + \varepsilon\mu(B(0,R)) \\ &\leqslant 3\varepsilon\mu(B(0,R)) + 2(\mathrm{Lip}\, g)\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $\mu_k$ 弱收敛于 $\mu$。□

还需要的其它性质是 $d_R$ 的可分性，即存在伪度量(空间)中稠的可数测度集。

**引理 1.11**

在 $\mathbb{R}^n$ 上存在局部有限测度 $\mu_1, \mu_2, \cdots$ 的可数集，使得对 $\mathbb{R}^n$ 上的每一个局部有限测度 $\mu$ 及任意 $R, \eta>0$，存在 $k$ 使 $d_R(\mu,\mu_k)<\eta$。

* **证明** 为证明本引理，只要证明对任意 $R=1,2,\cdots$ 都存在这样的测度集和利用可数集的可数并仍是可数的性质就足够了。对 $j=1,2,\cdots$ 设 $C_{j,1},\cdots C_{j,m_j}$ 是与 $B(0,R)$ 相交的边长为 $2^{-j}$ 的(半开)二进制立方体，设 $\delta_{j,i}$ 是在 $C_{j,i}$ 中心点上的一个单位点质量，设 $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ 是所有形如 $\sum_{i=1}^{m_j} q_{j,i,p}\delta_{j,i}$ 的测度集合的一个枚举，这里对每个 $j$ 和 $i$，序列 $(q_{j,i,1}, q_{j,i,2},\cdots)$ 是非负有理数的一个枚举。

给定 $\mu$，设 $\nu_j=\sum_{i=1}^{m_j}\mu(C_{j,i})\delta_{j,i}$，这里选取 $j$ 足够大以使 $d_R(\mu,\nu_j)<\frac{1}{2}\eta$ 成立。现在选取 $\mu_k=\sum_{i=1}^{m_j}q_{j,i,p}\delta_{j,i}$ 使得 $d_R(\nu_j,\mu_k)<\frac{1}{2}\eta$，这可以通过对每个 $i$，取 $q_{j,i,p}$ 充分接近 $\mu(C_{j,i})$ 来实现。于是 $d_R(\mu,\mu_k)<\eta$，引理得证。□

## 1.5 注记与参考文献

本章的大部分内容可以在关于测度论的任何基本教程中找到更为详细的叙述，例如 Doob (1994) 或 Kingman 和 Taylor (1966) 的书。在 Falconer (1985) 和 Mattila (1995a) 书中的处理是特别针对分形几何的，同时也包括了 Vitali 覆盖结论和密度性质的更多细节。

## 练　习

1.1 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是可微函数，证明极限 $\lim_{k\to\infty}b_k^{1/k}$ 存在，这里 $b_k=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^k(x)\right|$，$f^k$ 是 $f$ 的第 $k$ 次迭代。(提示：用链条法则证明 $(b_k)$ 是半可乘的。)

1.2 用式(1.4)证明算术—几何均值不等式：即 $(\prod_{i=1}^{m}x_i)^{1/m}\leqslant\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i$，这里 $x_1,\cdots,x_m>0$。(提示：$-\log x$ 是凸的。)

1.3 设 $\mathbb{Q}=(q_1,q_2,\cdots)$ 是有理数的一个枚举。对 $A\subset\mathbb{R}$，定义 $\mu(A)=\sum_{q_i\in A}2^{-i}$，验证 $\mu$ 是一个使 $\mathbb{R}$ 的所有子集可测的测度。并证明虽然 $\mu(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})=0$，但 $\text{spt}\mu=\mathbb{R}$，即 $\mu$ 是“集中”于 $\mathbb{Q}$ 的。

1.4 设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的测度，满足对所有 $x\in\mathbb{R}^n$，存在球 $B(x,r)$ 使 $\mu(B(x,r))<\infty$，证明 $\mu$ 是局部有限的。

1.5 用局部有界(波雷尔规则)测度的定义及命题 1.6 验证式(1.15)和式(1.16)。

1.6 对任意 $k$，设 $\{x_{i_1,\cdots,i_k}: i_j=1$ 或 $2\}$ 是 $2^k$ 个长度为 $3^{-k}$ 的按通常三分康托集 $E$ 构造与迭代的第 $k$ 级子区间。验证由假设 $\mu(x_{i_1,\cdots,i_k})=2^{-k}$ 和利用式(1.20)可以导出 $E$ 上的一个测度。证明当设 $\mu(x_{i_1,\cdots,i_k})=(1/3)^{n_1}(2/3)^{n_2}$，这里 $n_1$ 和 $n_2$ 分别是 $(i_1,\cdots,i_k)$ 中数字 1 和 2 出现的次数，则上述结果同样是正确的。

1.7 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}^+$ 是连续的，在 $[0,1]$ 上定义 $\mu$ 为 $\mu(A)=\int_A f(x)\mathrm{d}x$。证明 $\mu$ 和 $\mathcal{L}$ 是等价的，这里 $\mathcal{L}$ 是勒贝格测度。(注意对所有 $x\in[0,1]$ 和 $c_1,c_2$，$0<c_1\leqslant f(x)\leqslant c_2$)。

1.8 设 $\mu_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的测度，它赋予单位质量到点 $1+1/k$ 上。找出测度序列 $(\mu_k)$ 的弱极限 $\mu$。$\mu_k([0,1])\to\mu([0,1])$ 成立吗？

1.9 证明如果 $\mu_k\to\mu$，且 $A$ 是满足 $\mu(\partial A)=0$ 的有界集，这里 $\partial A$ 是 $A$ 的边界，那么 $\mu_k(A)\to\mu(A)$。

1.10 验证由式(1.28)定义的 $d_R$ 是局部有限测度的伪距离及支撑在 $B^0(0,R)$ 上的测度的距离。

# 第2章　分形几何回顾

这一章要复习一些分形几何的基本思想，它们将频繁地出现在整本书中。首先讨论分形维数，特别是豪斯道夫、填充、计盒维数的定义和性质，然后回顾迭代函数系，它提供了一种描述许多分形和分形测度的简便的方法。

为方便参考，将这些基本定义、性质和记号集中在这里，几乎所有的这些内容在FG中都有更为详细的叙述和完整的证明。

## 2.1 维数回顾

集合的“分形维数”的概念几乎是整个分形数学的中心。通常我们只对 $\mathbb{R}^n$ 的子集的维数感兴趣，但本质上同样的定义在一般距离空间上也成立。

许多维数的定义依赖于对集 $E$“在尺度 $r$ 下的度量”，通过这样的尺度观测集合可以确定集合的不规则性。于是维数通常是依据这些度量值当 $r \searrow 0$ 时服从的幂定律的状况来定义。

这里主要涉及集合的豪斯道夫、填充和计盒维数，虽然还提出了许多其它定义，但这些是最常用的维数定义。必须强调的是，尽管对“适当规则”的集，常用的维数定义经常给出相同的值，但集合的维数值还是会随利用的定义的不同而变化的。因此在任何特别的上下文中，弄清楚使用了哪种维数定义是重要的。

### 计盒维数

计盒维数（也称为熵维数、容量维数、对数密度等）。从概念上看，它是用到的最简单的维数，见FG的3.1节。对 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空有界子集 $E$，设 $N_r(E)$ 是覆盖 $E$ 的直径为 $r$ 的集合的最少个

数。(回忆一下集合 $U$ 的直径的定义是 $|U|=\sup\{|x-y|:x,\ y\in U\}$，即在 $U$ 中任何两点之间的最大距离。) $E$ 的下、上计盒(或盒)维数的定义分别为：

$$\underline{\dim}_B E=\liminf_{r\to 0}\frac{\log N_r(E)}{-\log r} \tag{2.1}$$

和

$$\overline{\dim}_B E=\limsup_{r\to 0}\frac{\log N_r(E)}{-\log r} \tag{2.2}$$

如果它们相等就把这相等的值称为 $E$ 的计盒维数或盒维数

$$\dim_B E=\lim_{r\to 0}\frac{\log N_r(E)}{-\log r} \tag{2.3}$$

这样，能覆盖 $E$ 的直径为 $r$ 的集合的最少个数大约是 $r^{-s}$ 阶，这里 $s=\dim_B E$。

有若干经常用到的这些定义的等价形式。如果 $N_r(E)$ 取以下任一个数，式(2.1)－(2.3)的极限值不变：

(i) 覆盖 $E$ 的直径为 $r$ 的集的最少个数，

(ii) 覆盖 $E$ 的半径为 $r$ 的闭球的最少个数，

(iii) 覆盖 $E$ 的边长为 $r$ 的立方体的最少个数，

(iv) 中心在 $E$ 内半径为 $r$ 的不交球的最多个数，

(v) 与 $E$ 相交的 $r$-网立方体个数，因此有名称"计盒"。

($r$-网立方体是形如 $[m_1r,(m_1+1)r)\times\cdots\times[m_nr,(m_n+1)r)$ 的立方体，这里 $m_1,\cdots,m_n$ 是整数。)

通过比较上述各种情形中的 $N_r(E)$ 的值，即可得到这些定义形式的等价性。见 FG 中的等价定义 3.1。

有一个具有相当不同性状的盒维数的等价定义，它涉及到 $r$-邻域或称 $r$-平行体 $E_r$ 的 $n$ 维体积，$E_r$ 定义如下：

$$E_r=\{x\in\mathbb{R}^n：存在\ y\in E,\ 使\ |x-y|\leqslant r\}$$

那么对 $E\subset\mathbb{R}^n$，

$$\underline{\dim}_B E = n - \limsup_{r \to 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(E_r)}{\log r} \tag{2.4}$$

$$\overline{\dim}_B E = n - \liminf_{r \to 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(E_r)}{\log r} \tag{2.5}$$

且如果下面极限存在，则

$$\dim_B E = n - \lim_{r \to 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(E_r)}{\log r} \tag{2.6}$$

其中 $\mathcal{L}^n$ 是 $n$ 维体积或 $n$ 维勒贝格测度。就这个定义来说，盒维数有时被称为闵可夫斯基维数。

## 豪斯道夫和填充维数

豪斯道夫和填充维数要比盒维数复杂一些，它们是通过测度定义的。$\mathbb{R}^n$ 的一个有限或可数的子集族 $\{U_i\}$，如果对任意 $i$，$|U_i| \leqslant \delta$ 且 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$，则称 $\{U_i\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的一个 $\delta$-覆盖。设 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，$s \geqslant 0$。对任意 $\delta > 0$，定义

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ 是 } E \text{ 的 } \delta\text{-覆盖}\right\} \tag{2.7}$$

随着 $\delta$ 的减少，$E$ 的 $\delta$-覆盖族是减少的，所以上式中下确界是非降的，且当 $\delta \searrow 0$ 时趋近一个极限。于是定义

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \tag{2.8}$$

这个极限对所有 $E \subset \mathbb{R}^n$ 存在，可以是 0 或 $\infty$。称 $\mathcal{H}^s(E)$ 为 $E$ 的 s 维豪斯道夫测度。

可以证明 $\mathcal{H}^s(E)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个波雷尔规则测度(见式(1.14))，故对任意集合 $E_1, E_2, \cdots$，特别有

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_i) \tag{2.9}$$

如果 $E_i$ 是不交的波雷尔集，则等号成立。

豪斯道夫测度推广了勒贝格测度，故 $\mathcal{H}^1(E)$ 给出一个集合或曲线 $E$ 的“长度”，$\mathcal{H}^2(E)$ 给出一个区域或曲面（标准化）的“面积”，等等。通常，$\mathcal{L}^n = 2^{-n}v_n\mathcal{H}^n$，这里 $v_n$ 是 $n$ 维单位球的体积。

经常要考虑在李卜希兹映射下集合的象的豪斯道夫测度。对任一满足

$$|f(x)-f(y)| \leqslant c|x-y|, \quad \text{任意 } x,y \in E \tag{2.10}$$

的李卜希兹函数 $f: E \to \mathbb{R}^n$，

$$\mathcal{H}^s(f(E)) \leqslant c^s \mathcal{H}^s(E) \tag{2.11}$$

同样，如果 $f: E \to \mathbb{R}^m$ 是双李卜希兹函数，即若 $c_1, c_2 > 0$，对任意 $x,y \in E$，

$$c_1|x-y| \leqslant |f(x)-f(y)| \leqslant c_2|x-y|$$

则

$$c_1^s \mathcal{H}^s(E) \leqslant \mathcal{H}^s(f(E)) \leqslant c_2^s \mathcal{H}^s(E) \tag{2.12}$$

上述的一种特殊情形是当 $f$ 是相似比为 $r$ 的相似变换时，即对任意 $x,y \in E$，$|f(x)-f(y)| = r|x-y|$，此时：

$$\mathcal{H}^s(f(E)) = r^s \mathcal{H}^s(E) \tag{2.13}$$

这就是豪斯道夫测度的比例性质，它可以推出熟悉的长度、面积、体积等的比例性质。

由式(2.7)和(2.8)容易证明，对任意集合 $E \subset \mathbb{R}^n$，存在数 $\dim_H E$，称之为 $E$ 的豪斯道夫维数，满足：如果 $s < \dim_H E$，$\mathcal{H}^s(E) = \infty$，如果 $s > \dim_H E$，$\mathcal{H}^s(E) = 0$。即

$$\dim_H E = \inf\{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(E) = \infty\}$$

于是集合 $E$ 的豪斯道夫维数可以被认为是这样的一个数 $s$，使得在 $s$ 处 $\mathcal{H}^s(E)$ 从 $\infty$“跳跃”到 0，见图 2.1。当 $s = \dim_H E$，测度 $\mathcal{H}^s(E)$ 可以是零或无穷，但是在最好的情形是（发生于许多熟悉的例子）$0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$，在这种情形下，有时称 $E$ 为一个 $s$-集。

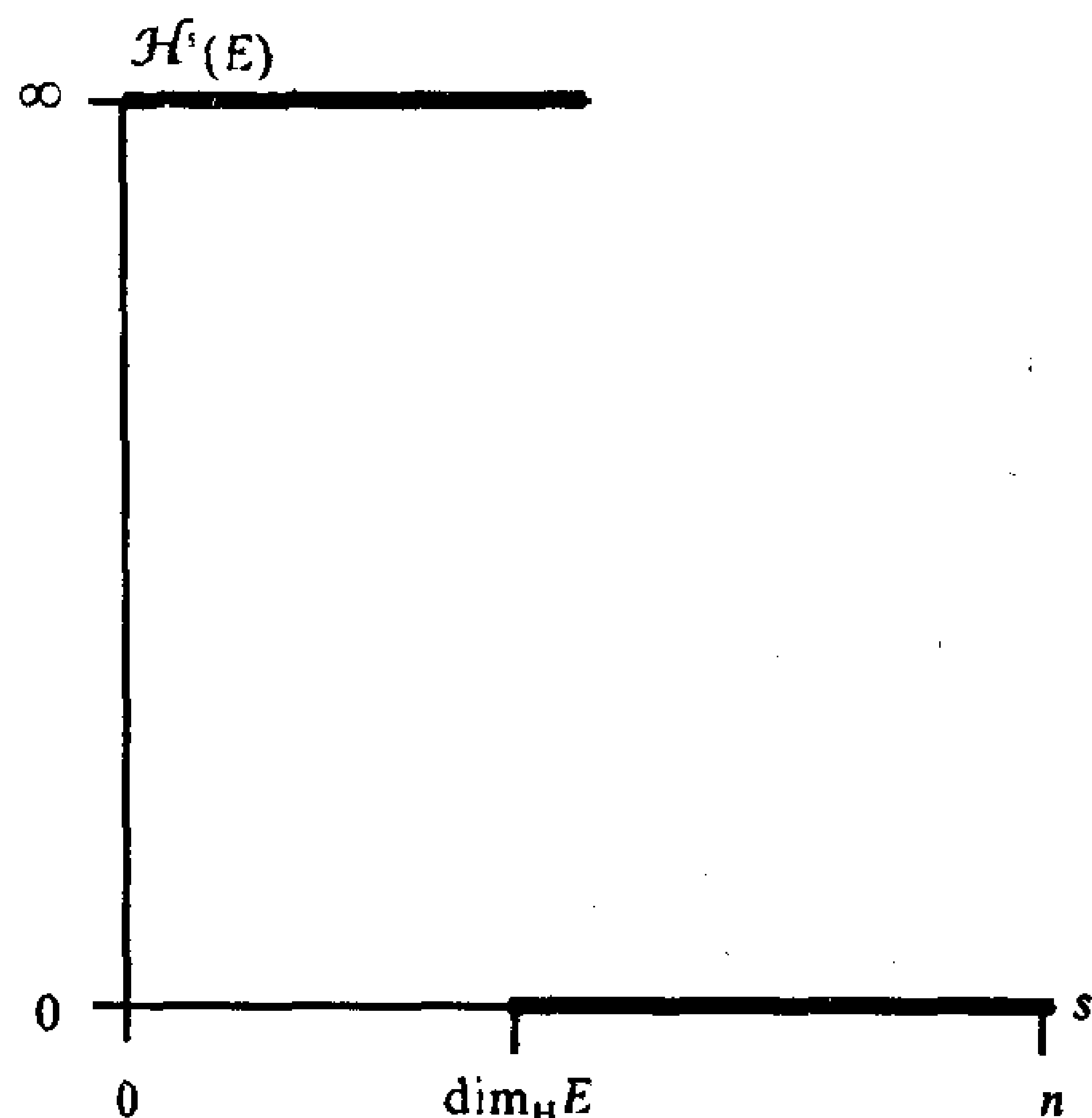



图 2.1 $E$ 的豪斯道夫维数是 $s$，在 $s$ 处 $\mathcal{H}^s(E)$ 从 $\infty$ 跳跃到 0

填充维数的定义与豪斯道夫维数定义相似。称一族中心在 $E$ 内，半径最多为 $\delta$ 的有限或可数的不交的球族$\{B_i\}$ 为 $E\subset\mathbb{R}^n$ 的一个 $\delta$-填充。对 $\delta>0$, 定义

$$\mathcal{P}_\delta^s(E)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|B_i|^s:\{B_i\}\text{ 是 }E\text{ 的一个 }\delta\text{-填充}\right\}$$

那么随着 $\delta$ 的减少 $\mathcal{P}_\delta^s(E)$ 是不升的，故可取极限

$$\mathcal{P}_0^s(E)=\lim_{\delta\to 0}\mathcal{P}_\delta^s(E)$$

遗憾的是 $\mathcal{P}_0^s$ 不是一个测度(它不满足半可数可加性), 为了克服这个困难，定义

$$\mathcal{P}^s(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{P}_0^s(E_i):E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right\}$$

这是一个 $\mathbb{R}^n$ 上的波雷尔测度，称为 $E$ 的 $s$-维填充测度。$\mathcal{P}^1$、$\mathcal{P}^2$ 也给出了光滑集的长度，面积等，但是对分形，$\mathcal{H}^s$ 和 $\mathcal{P}^s$ 可以是非常不同的测度。

在李卜希兹映射方面，填充测度与豪斯道夫测度的表现形式是一样的，用 $\mathcal{P}^s$ 取代 $\mathcal{H}^s$，式(2.11)－(2.13)仍然成立。可以证明对任意集合 $A$，$\mathcal{H}^s(A)\leqslant\mathcal{P}^s(A)$。

类似于豪斯道夫维数，存在称为 $E$ 的填充维数的数 $\dim_P E$，满足：如果 $s<\dim_P E$，则 $\mathcal{P}^s(E)=\infty$，如果 $s>\dim_P E$，则 $\mathcal{P}^s(E)=0$。即

$$\dim_P E=\inf\{s:\mathcal{P}^s(E)=0\}=\sup\{s:\mathcal{P}^s(E)=\infty\}$$

有时通过上盒维数来表示填充维数是方便的。对 $E\in\mathbb{R}^n$，

$$\dim_P E=\inf\left\{\sup_i \overline{\dim}_B E_i : E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right\}$$

（下确界在 $E$ 的所有可数覆盖 $\{E_i\}$ 中取）。见 FG 中的命题 3.6。

### 维数的基本性质

书中将频繁地用到维数的一些基本性质。如果用“dim”表示豪斯道夫、填充、上盒和下盒维数中的任一个，则下列性质都成立。

**单调性** 如果 $E_1\subset E_2$，则 $\dim E_1\leqslant\dim E_2$。

**有限集** 如果 $E$ 是有限的，则 $\dim E=0$。

**开集** 如果 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的（非空）开子集，则 $\dim E=n$。

**光滑流形** 如果 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 $m$ 维光滑流形，则 $\dim E=m$。

**李卜希兹映射** 如果 $f:E\to\mathbb{R}^m$ 是李卜希兹函数，则 $\dim f(E)\leqslant\dim E$。（对豪斯道夫和填充维数结论由式(2.11)及它的填充测度的相应形式得到，对盒维数从定义就可推出）。注意特别当 $X$ 是开集，$E\subset X$，而 $f:X\to\mathbb{R}^n$ 具有有界导数时，由中值定理知上述结论也是成立的。

**几何不变性** 如果 $f$ 是一个相似或仿射变换，则 $\dim f(E)=\dim E$（这是双李卜希兹不变性的一种特殊情况）。

豪斯道夫、填充和上盒维数是有限稳定的，即对任何有限集族$\{E_1,\cdots,E_k\}$，有$\dim\bigcup_{i=1}^{k}E_i=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\dim E_i$，然而下盒维数不是有限稳定的。

豪斯道夫和填充维数是可数稳定的，即$\dim\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\sup_{1\leqslant i<\infty}\dim E_i$（结论可以由豪斯道夫和填充测度的半可数可加性推出。）可数稳定性是这些维数优于盒维数的主要优点之一，特别它蕴涵着可数集的豪斯道夫和填充维数为零。

再回顾一下结论$\underline{\dim}_B E=\underline{\dim}_B \overline{E}$和$\overline{\dim}_B E=\overline{\dim}_B \overline{E}$，这里$\overline{E}$是$E$的闭包。但由于经常要研究在$\mathbb{R}^n$的一个开域内稠密的分形集$E$，因而它有满的盒维数$n$，事实上这正是盒维数的一个缺陷。

在这些维数之间有一些基本的不等式。对任意非空集$E$

$$\dim_H E\leqslant\dim_P E\leqslant\overline{\dim}_B E \text{ 和 } \dim_H E\leqslant\underline{\dim}_B E\leqslant\overline{\dim}_B E \tag{2.14}$$

（对涉及到盒维数的不等式，假设$E$是非空和有界的。）应用中，大部分定义的维数取值是在豪斯道夫和上盒维数之间，因此如果能够证明$\dim_H E=\overline{\dim}_B E$，那么所有正常定义的维数都取这共同的值。

### 维数计算

我们频繁地要估计一些集合的维数，通常下估计比上估计更难得到。寻找一个集合的维数有许多种途径，但是大部分方法涉及到研究此集合支撑的一个适当的测度（其它方法常常能转化成这一过程）。一个基本但却非常有用的技巧被称为“质量分布原理”。

**命题 2.1 （质量分布原理）**

设$E\subset\mathbb{R}^n$，$\mu$是使$\mu(E)>0$的有限测度，假设存在数$s\geqslant0$，$c>0$和$\delta_0>0$，对所有满足$|U|\leqslant\delta_0$的集合$U$，

$$\mu(U)\leqslant c|U|^s$$

则 $\mathcal{H}^s(E)\geqslant\mu(E)/c$ 且

$$s\leqslant\dim_{\mathrm{H}}E\leqslant\underline{\dim}_{\mathrm{B}}E\leqslant\overline{\dim}_{\mathrm{B}}E$$

**证明** 回顾一下 FG 中命题 4.2 的非常简单的证明。如果$\{U_i\}$是直径最多为 $\delta_0$ 的 $E$ 的任何覆盖族，则

$$\mu(E)\leqslant\mu(\bigcup_i U_i)\leqslant\sum_i\mu(U_i)\leqslant c\sum_i|U_i|^s$$

故对 $\delta\leqslant\delta_0$, $\mu(E)\leqslant c\,\mathcal{H}^s_\delta(E)$ 成立。令 $\delta\to 0$ 即得结论。□

如果能找到 $E$ 上的满足一定的"局部密度"条件的测度 $\mu$, 发展上述的思想就能够估计集合 $E$ 的豪斯道夫和填充测度及它的维数。观察豪斯道夫和填充测度之间的(近似)对称性，下面的命题给出它们的上、下估计。

**命题 2.2**

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是波雷尔集，$\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有限的波雷尔测度，$0<c<\infty$。

(a) 如果对所有 $x\in E$, $\limsup_{r\to0}\mu(B(x,r))/r^s\leqslant c$, 则 $\mathcal{H}^s(E)\geqslant\mu(E)/c$。

(b) 如果对所有 $x\in E$, $\limsup_{r\to0}\mu(B(x,r))/r^s\geqslant c$, 则 $\mathcal{H}^s(E)\leqslant2^s\mu(E)/c$。

(c) 如果对所有 $x\in E$, $\liminf_{r\to0}\mu(B(x,r))/r^s\leqslant c$, 则 $\mathcal{P}^s(E)\geqslant2^s\mu(E)/c$。

(d) 如果对所有 $x\in E$, $\liminf_{r\to0}\mu(B(x,r))/r^s\geqslant c$, 则 $\mathcal{P}^s(E)\leqslant2^s\mu(E)/c$。

**证明** (a) 和(b) 在 FG 中的命题 4.9 有证明；(a) 的证明需要用到稍许超出豪斯道夫测度定义的内容，同时(b) 的证明要用到 Vitali 覆盖引理。对填充测度可用非常类似的方法同样证明，(d) 由填充测度的定义容易得到，(c) 需要用到覆盖引理。□

人们对集合的维数经常比对集合的测度更感兴趣，因此下面给出命题2.2的关于维数的一个版本，通过测度的局部维数来表达可能是更方便一些。定义 $\mu$ 在 $x\in\mathbb{R}^n$ 的下，上局部维数（也称为点维数或 Hölder 指数）为

$$\underline{\dim}_{\rm loc}\mu(x)=\liminf_{r\to 0}\frac{\log\mu(B(x,r))}{\log r} \tag{2.15}$$

$$\overline{\dim}_{\rm loc}\mu(x)=\limsup_{r\to 0}\frac{\log\mu(B(x,r))}{\log r} \tag{2.16}$$

这些局部维数表示了 $r$ 充分小时 $\mu(B(x,r))$ 所服从的幂定律的状况。注意如果存在 $r>0$ 使 $\mu(B(x,r))=0$，则 $\underline{\dim}_{\rm loc}\mu(x)=\overline{\dim}_{\rm loc}\mu(x)=\infty$。

**命题 2.3**

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是波雷尔集，$\mu$ 是有限测度，

(a) 如果对任意 $x\in E$ 及 $\mu(E)>0$，$\underline{\dim}_{\rm loc}\mu(x)\geqslant s$，则 $\dim_{\rm H}E\geqslant s$。

(b) 如果对任意 $x\in E$，$\underline{\dim}_{\rm loc}\mu(x)\leqslant s$，则 $\dim_{\rm H}E\leqslant s$。

(c) 如果对任意 $x\in E$ 及 $\mu(E)>0$，$\overline{\dim}_{\rm loc}\mu(x)\geqslant s$，则 $\dim_{\rm P}E\geqslant s$。

(d) 如果对任意 $x\in E$，$\overline{\dim}_{\rm loc}\mu(x)\leqslant s$，则 $\dim_{\rm P}E\leqslant s$。

**证明** 由命题2.2，注意到(a)中的假设蕴涵对任意 $\varepsilon>0$，$\limsup_{r\to 0}\mu(B(x,r))/r^{s-\varepsilon}=0$，即得结论(a)。对(b)，(c)和(d)类似可证。□

注意在命题2.3的(a)和(c)中，只要假设 $x$ 属于具有正 $\mu$-测度的 $E$ 的子集就够了。

下面叙述的是上面结果的部分逆命题，它们确定了在一个给定维数的集合上支撑着一个具有相应局部维数的测度。

**命题 2.4**

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是非空波雷尔集

(a) 如果 $\dim_H E > s$, 则存在满足 $0 < \mu(E) < \infty$ 的 $\mu$, 且对任意 $x \in E$, $\underline{\dim}_{loc}\mu(x) \geqslant s$。

(b) 如果 $\dim_H E < s$, 则存在满足 $0 < \mu(\overline{E}) < \infty$ 的 $\mu$, 且对任意 $x \in E$, $\underline{\dim}_{loc}\mu(x) \leqslant s$。

(c) 如果 $\dim_P E > s$, 则存在满足 $0 < \mu(E) < \infty$ 的 $\mu$, 且对 $\mu$-几乎所有 $x$, $\overline{\dim}_{loc}\mu(x) \geqslant s$。

(d) 如果 $\dim_P E < s$, 则存在满足 $0 < \mu(\overline{E}) < \infty$ 的 $\mu$, 且对任意 $x \in E$, $\overline{\dim}_{loc}\mu(x) \leqslant s$。

**证明** (a)是 FG 中的系 4.12（“Frostman 引理”）表达成局部维数的形式。(b), (c) 和(d) 的证明也要用到类似精细的论证，详细的技巧可在参考文献中找到。□

注意，在命题 2.3 和 2.4 中，集合的下局部维数与它的豪斯道夫维数相关联，而集合的上局部维数与填充维数相关联。

命题 2.3(a) 和 2.4(a)可以被“积分”而得到位势理论准则，在计算豪斯道夫维数和测度时经常用到它。对 $s \geqslant 0$, 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的测度 $\mu$ 的$s$-能为

$$I_s(\mu) = \int\int |x-y|^{-s} \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)$$

**命题 2.5**

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$

(a) 如果存在 $E$上满足 $I_s(\mu) < \infty$ 的有限测度 $\mu$, 则 $\mathcal{H}^s(E) = \infty$, 且 $\dim_H E \geqslant s$。

(b) 如果 $E$ 是满足 $\mathcal{H}^s(E) > 0$ 的波雷尔集，则存在 $E$ 上的有限测度 $\mu$, 对任意 $t < s$, 满足 $I_t(\mu) < \infty$。

**证明** 见 FG 中的定理 4.13。□

**密度和可求长性**

在几何测度论的发展中，密度发挥了相当重要的作用。虽然有可能定义任何有限测度的密度，但这里主要注意的是 $s$-集的密度，即满足 $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$ 的波雷尔集 $E\subset\mathbb{R}^n$，其中 $s=\dim_H E$。$E$ 在 $x$ 点的下、上($s$-维)密度定义如下

$$\underline{D}^s(x)=\underline{D}^s(E,x)=\liminf_{r\to 0}\mathcal{H}^s(E\cap B(x,r))/(2r)^s \tag{2.17}$$

和

$$\overline{D}^s(x)=\overline{D}^s(E,x)=\limsup_{r\to 0}\mathcal{H}^s(E\cap B(x,r))/(2r)^s \tag{2.18}$$

(当研究的集 $E$ 是明确的，则记为 $\underline{D}^s(x)$ 比 $\underline{D}^s(E,x)$ 更好些。)当 $\underline{D}^s(E,x)=\overline{D}^s(E,x)$ 时，$E$ 在 $x$ 的密度 $D^s(E,x)$ 存在且等于这相同值。(通过在式(2.17)和(2.18)中用 $\mu$ 来替代 $\mathcal{H}^s$，则可以定义更加一般的测度 $\mu$ 的密度。)

注意到，如果 $X$ 是 $\mathbb{R}$ 的开子集及 $f:X\to\mathbb{R}$ 是 $C^1$ 映射，那么对 $E\subset\mathbb{R}$，

$$\underline{D}^s(E,x)=\underline{D}^s(f(E),f(x))\text{和}\overline{D}^s(E,x)=\overline{D}^s(f(E),f(x)) \tag{2.19}$$

对任意使 $f'(x)\neq 0$ 的 $x$ 成立。直观上这是因为 $f$ 可以看作是在 $x$ 附近的相似比为 $|f'(x)|$ 的局部相似变换，利用比例性质(2.13)，这个变换将 $B(x,r)$ 的直径扩大了 $|f'(x)|$ 倍，相应的 $B(x,r)$ 的 $\mathcal{H}^s$-测度则扩大了 $|f'(x)|^s$ 倍，见练习 2.6。事实上，式(2.19)对可微保形映射 $f:X\to\mathbb{R}^n$ 也是成立的，其中 $X\subset\mathbb{R}^n$。(称映射 $f$ 是保形的，如果 $f'(x)$ 作为 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换，是对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 的相似变换。)

关于密度的经典结论是勒贝格密度定理。它叙述的是，如果 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的勒贝格可测子集，则对 $\mathcal{L}^n$-几乎所有的 $x$ 有

$$\lim_{r\to 0}\mathcal{L}^n(E\cap B(x,r))/\mathcal{L}^n(B(x,r))=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases} \tag{2.20}$$

这是在命题 1.7 中取 $\mu$ 为 $\mathcal{L}^n$ 的特殊情形。由于 $\mathcal{L}^n=2^{-n}v_n\mathcal{H}^n$，

其中 $v_n$ 是 $n$ 维单位球的体积，用密度的形式表示即是

$$D^n(E,x)=\lim_{r\to 0}\mathcal{H}^n(E\cap B(x,r))/(2r)^n=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases} \tag{2.21}$$

对 $\mathcal{H}^n$-几乎所有的 $x$ 成立。自然要问对一般的 $s$ 值，在什么范围内有类似式(2.21) 的结果成立。

对 $s$-集 $E\subset\mathbb{R}^n$, 容易证明对 $\mathcal{H}^s$-几乎所有的 $x\notin E$, $D^s(E,x)=0$。而且对几乎所有的 $x\in E$, $2^{-s}\leqslant\overline{D}^s(E,x)\leqslant 1$, 见 FG 中的命题 5.1。一个更加深刻的性质是，除了 $s$ 是整数，对 $\mathcal{H}^s$-几乎所有的 $x\in E$, $\underline{D}^s(E,x)<\overline{D}^s(E,x)$。在系 9.8 中将利用切线测度证明这一点，而 FG 中的命题 5.3 给出了一种特殊情形。从某种意义上说，这个密度的不存在是分形性的反映。

$s$ 是整数时的情形就更为复杂。在这种情况 $s$-集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可以分解为 $E=E_R\cup E_I$, 这里 $E_R$ 是规则的，即对 $\mathcal{H}^s$-几乎所有的 $x\in E_R$ 满足 $\underline{D}^s(E_R,x)=\overline{D}^s(E_R,x)=1$, 而 $E_I$ 是不规则的，它对 $\mathcal{H}^s$-几乎所有的 $x\in E_I$, $\underline{D}^s(E_I,x)\leqslant c\,\overline{D}^s(E_I,x)$, 这里 $c<1$,仅依赖于 $n$和 $s$, 见图 2.2。

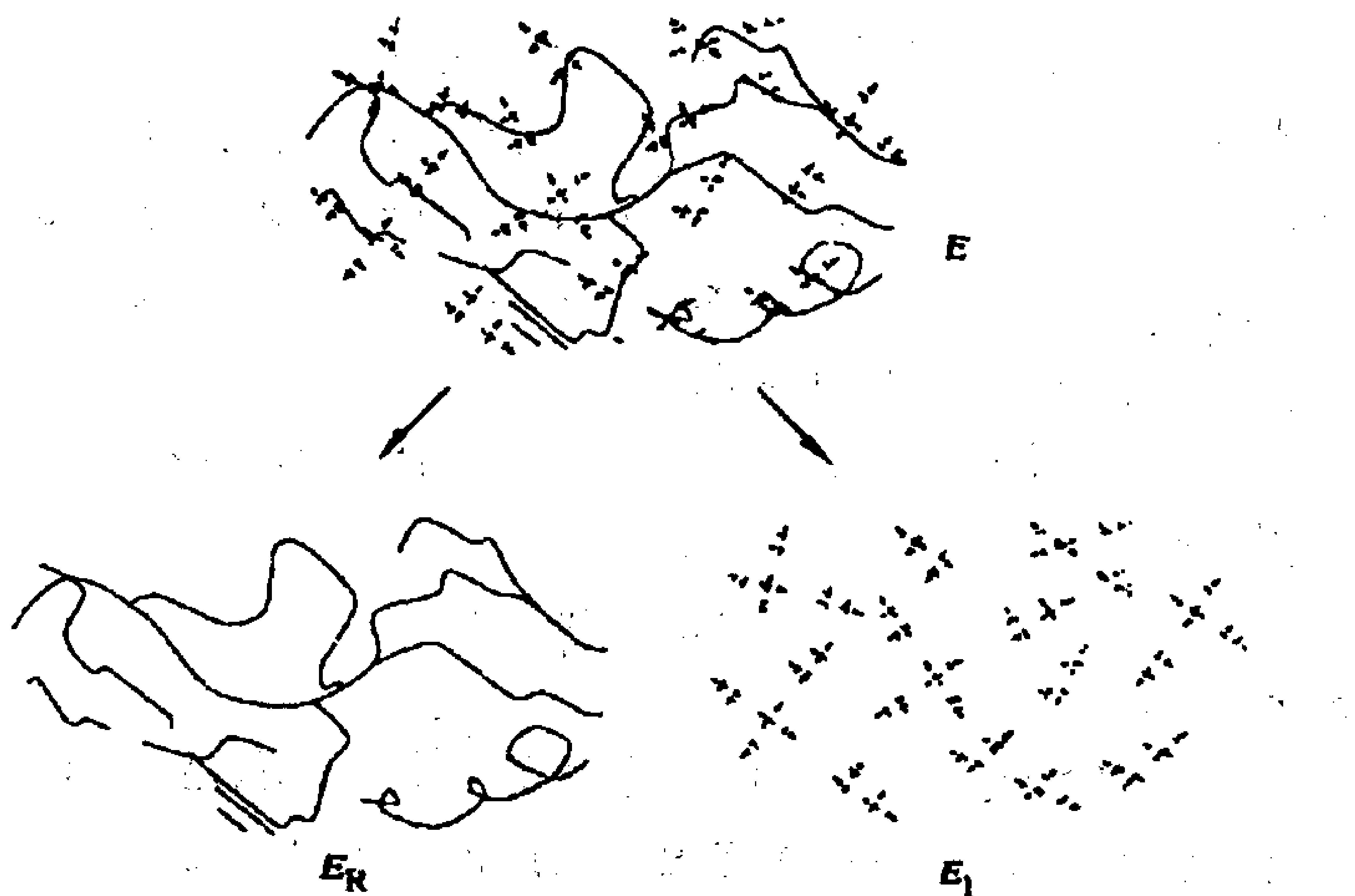



图 2.2 1-集 $E$ 分解成一个规则部分 $E_R$ 和一个不规则部分 $E_I$

规则和不规则集具有通过可求长性表现出的几何特性。如果 $E$ 是规则的，则 $E$ 是可求长的，即 $E$ 的几乎所有部分都能被使 $\mathcal{H}^s(E\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=0$ 的可数李卜希兹子集族 $E_1$、$E_2$、… 所覆盖。(称集合 $E_0$ 为李卜希兹子集，如果 $E_0=f(A)$，其中 $A\subset\mathbb{R}^s$，$f:A\rightarrow\mathbb{R}^n$ 是一个李卜希兹映射。)于是可求长集是由一族可数的李卜希兹子集组成，这些李卜希兹子集看起来像曲线、曲面或典型的 $s$-维集合的子集。

另一方面，如果 $E$ 是不规则的，那么 $E$ 是完全不可求长的，即对每个李卜希兹子集 $E_0$，满足 $\mathcal{H}^s(E\cap E_0)=0$，故 $E$ 与可求长的 $s$-维集只有可以忽略的交。这样，不规则集可能被认为是分形，而规则集或可求长集则是非分形的，对整数维集来说，密度的不存在正是它的分形性质特征。在 $s$-集的度量或密度性质与集的几何性质或可求长性结构之间建立联系是困难的，它是几何测度论发展的中心问题，更详细的可参见 FG 的第5章。

## 2.2 迭代函数系回顾

迭代函数系(或图)提供了一种描述和重新构造许多分形的非常简便的方法，从某方面来说这些分形是由它们自己的小象点构成的。此问题的研究是在 $\mathbb{R}^n$ 的非空闭子集 $X$ 上进行的，且经常是 $X=\mathbb{R}^n$。一个迭代函数系 (IFS) 由一族 $X$ 上的压缩映射 $\{F_1,\cdots,F_m\}$ 组成，这里 $m\geqslant 2$。于是对 $i=1,\cdots,m$，$F_i:X\rightarrow X$

$$|F_i(x)-F_i(y)|\leqslant r_i|x-y| \qquad \text{任意 } x,y\in X \tag{2.22}$$

这里 $r_i<1$。记

$$r_{\max}=\max_{1\leqslant i\leqslant m} r_i \tag{2.23}$$

故 $r_{\max}<1$。

一个 IFS 最基本的性质是它确定了唯一的满足 $E=\bigcup_{i=1}^{m}F_i(E)$ 的非空紧集 $E$，这种集常常是分形。例如，由下式给出的 $F_1,F_2:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$，

$$F_1(x)=\frac{1}{3}x \quad 和 \quad F_2(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \tag{2.24}$$

满足 $E=F_1(E)\cup F_2(E)$ 的集合 $E$ 是三分康托集，见图 2.3

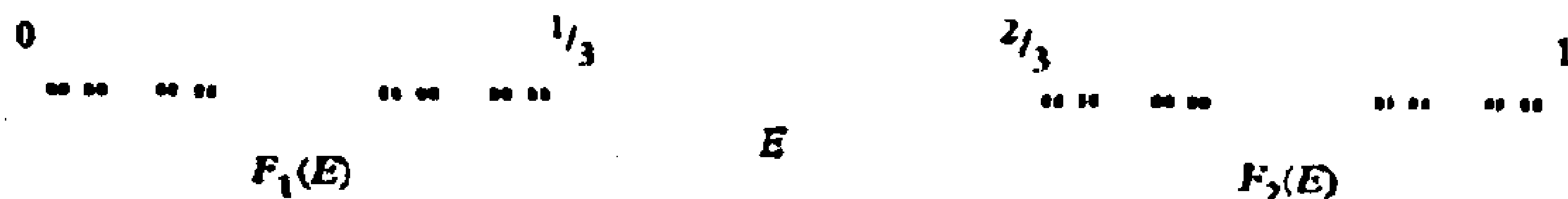



图 2.3 三分康托集由二个与它自己的比例为 $\frac{1}{3}$ 的复制所构成，于是 $E=F_1(E)\cup F_2(E)$，其中 $F_1$ 和 $F_2$ 由式(2.24) 给出

为了确定这个基本性质，考虑 $X$ 的非空紧子集类 $S$，在 $S$ 上可以定义一个度量或距离 $d$ 为

$$d(A,B)=\inf\{\delta\ :A\subset B_\delta 且 B\subset A_\delta\} \tag{2.25}$$

这里 $A_\delta$ 是 $A$ 的 $\delta$- 邻域。这样，$d$ 满足关于距离的三个要素((i) $d(A,B)\geqslant 0$，等式成立当且仅当 $A=B$，(ii) $d(A,B)=d(B,A)$，(iii) 对任意的 $A,B,C$ $d(A,B)\leqslant d(A,C)+d(C,B)$)，且称之为 $S$ 上的豪斯道夫距离。

可以证明 $d$ 是 $S$ 上的完备距离，即 $S$ 内的每一哥西序列集都收敛于 $S$ 内的某个集。用这个事实可以给出熟悉的 IFS 的基本性质“压缩映射定理”的证明。在 FG 中的定理 9.1 给出了一种可供选择的证明。

**定理 2.6**

设 $\{F_1,\cdots,F_m\}$ 是 $X\subset\mathbb{R}^n$ 上的 IFS，那么存在唯一非空紧集 $E\subset X$，满足

$$E=\bigcup_{i=1}^{m}F_i(E) \tag{2.26}$$

而且，对 $A\in S$，定义变换 $F$: $S\to S$ 为：

$$F(A)=\bigcup_{i=1}^{m}F_i(A) \tag{2.27}$$

则对任意 $A \in S$，当 $k \to \infty$ 时，在距离 $d$ 下

$$F^k(A) \to E$$

这里 $F^k$ 是 $F$ 的第 $k$ 次迭代。更进一步，如果 $A \in S$，对任意 $i$，$F_i(A) \subset A$，则

$$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(A) \tag{2.28}$$

**证明** 如果 $A,B \in S$，那么利用距离 $d$ 的定义并注意到，如对所有 $i$，$\delta$- 邻域$(F_i(A))_\delta$ 包含 $F_i(B)$，则$(\bigcup_{i=1}^m F_i(A))_\delta$ 包含$\bigcup_{i=1}^m F_i(B)$，反之亦然，则

$$d(F(A),F(B)) = d\left(\bigcup_{i=1}^{m} F_i(A),\ \bigcup_{i=1}^{m} F_i(B)\right)$$
$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} d(F_i(A),F_i(B))。$$

由式(2.22)，

$$d(F(A),F(B)) \leqslant (\max_{1 \leqslant i \leqslant m} r_i)\ d(A,B) \tag{2.29}$$

由于 $\max_{1 \leqslant i \leqslant m} r_i < 1$，故映射 $f$ 是完备度量空间$(S,d)$ 上的一个压缩。由 Banach 压缩映射定理，$F$ 有唯一不动点，也就是说，存在唯一的集 $E \in S$，满足 $F(E)=E$，即式(2.26)，而且当 $k \to \infty$ 时，$F^k(A) \to E$。特别，如果对任意 $i$，$F_i(A) \subset A$，那么 $F(A) \subset A$，于是 $F^k(A)$ 是包含 $E$ 的一个递减的非空紧集序列，且使交集$\bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(A)$ 必然等于 $E$。□

满足式(2.26)的唯一非空紧集 $E$ 称为 IFS$\{F_1,\cdots,F_m\}$ 的吸引子或不变集。IFS 可以被认为是集合 $E$ 的定义或表示。

有两个与 IFS 相联系的主要问题。其一是给定一个分形 $E$，要寻找一个以 $E$ 为吸引子的 IFS，至少使找到的 IFS 的吸引子非常接近 $E$。在许多情况下，包括许多熟悉的自相似集，含有较少的压缩变换的适当的 IFS 可以通过观察写出，如例 (2.24) 中的三分康托集一样。在这样的例子中，IFS 提供了一个非常有效的描

绘集合或对集合进行“编码”的方法。它引出了更一般的分形图象压缩问题：如何寻找所含数量较少的压缩变换族来表示任意给定的集合或图像，见 FG 的 9.5 节。

反过来的问题是重构给定的 IFS 的吸引子 $E$，这在计算上非常容易。这是由于，由迭代式(2.29)，对每个 $A \in S$，

$$d(F^k(A),E) \leqslant (\max_{1 \leqslant i \leqslant m} r_i)^k d(A,E) \tag{2.30}$$

因此 $F^k(A)$以几何速度收敛于$E$，故对合适的$k$绘出$F^k(A)=\bigcup_{I_k} F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \cdots \circ F_{i_k}(A)$的图，就给出了$E$的一个近似(这里的并是对所有$k$项序列$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$，$i_j \in \{1,2,\cdots,m\}$的集合$I_k$取的)。有时称这些集合$F^k(A)$为关于$E$的先分形，例如见图 2.4 和 2.5。一个可供选择但常常是有效的重构$E$的方法是取任意初始点$x_0$，以及随机地以等概率从$\{F_1,\cdots,F_m\}$独立地选择一个序列$F_{i_1},F_{i_2},\cdots$ 那么由

$$x_k = F_{i_k}(x_{k-1}) \qquad k=1,2,\cdots \tag{2.31}$$

定义的点列对足够大的 $k$ 不可分辨地靠近 $E$，而且还随机地在 $E$ 上分布。譬如从 $k=100$ 开始的序列$(x_k)$的图可以给出 $E$ 的一个良好的近似。在某些例子中，通过加权选择$F_i$的概率可以得到更好的结果。取“迭代函数系”这个名称的原因明显地是从这些重建过程来的。

IFS 提供了对吸引子 $E$ 和 $E$ 的先分形的组成部分进行编码的一个自然的方法，利用类似的方法，则三分康托集中的点可以用仅包含数字 0 和 2 的 3 进小数展开式来表示。设$\{F_1,\cdots,F_m\}$是吸引子为 $E$ 的 IFS，对 $k=0,1,2,\cdots$，定义 $I_k$ 为所有从$\{1,2,\cdots,m\}$中选择的 $k$-项整数序列集，即

$$I_k=\{(i_1,i_2,\cdots,i_k):\quad 1 \leqslant i_j \leqslant m\}; \tag{2.32}$$

把 $I_0$ 看作仅包含空集的序列。通常把$I_k$的序列简写为

$$\boldsymbol{i}=(i_1,i_2,\cdots,i_k) \tag{2.33}$$

记所有这样的有限序列的集合为

$$I=\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \tag{2.34}$$

而 $I_\infty$ 为无穷序列组成的相应的集，故

$$I_\infty=\{(i_1,i_2,\cdots):1\leqslant i_j\leqslant m\} \tag{2.35}$$

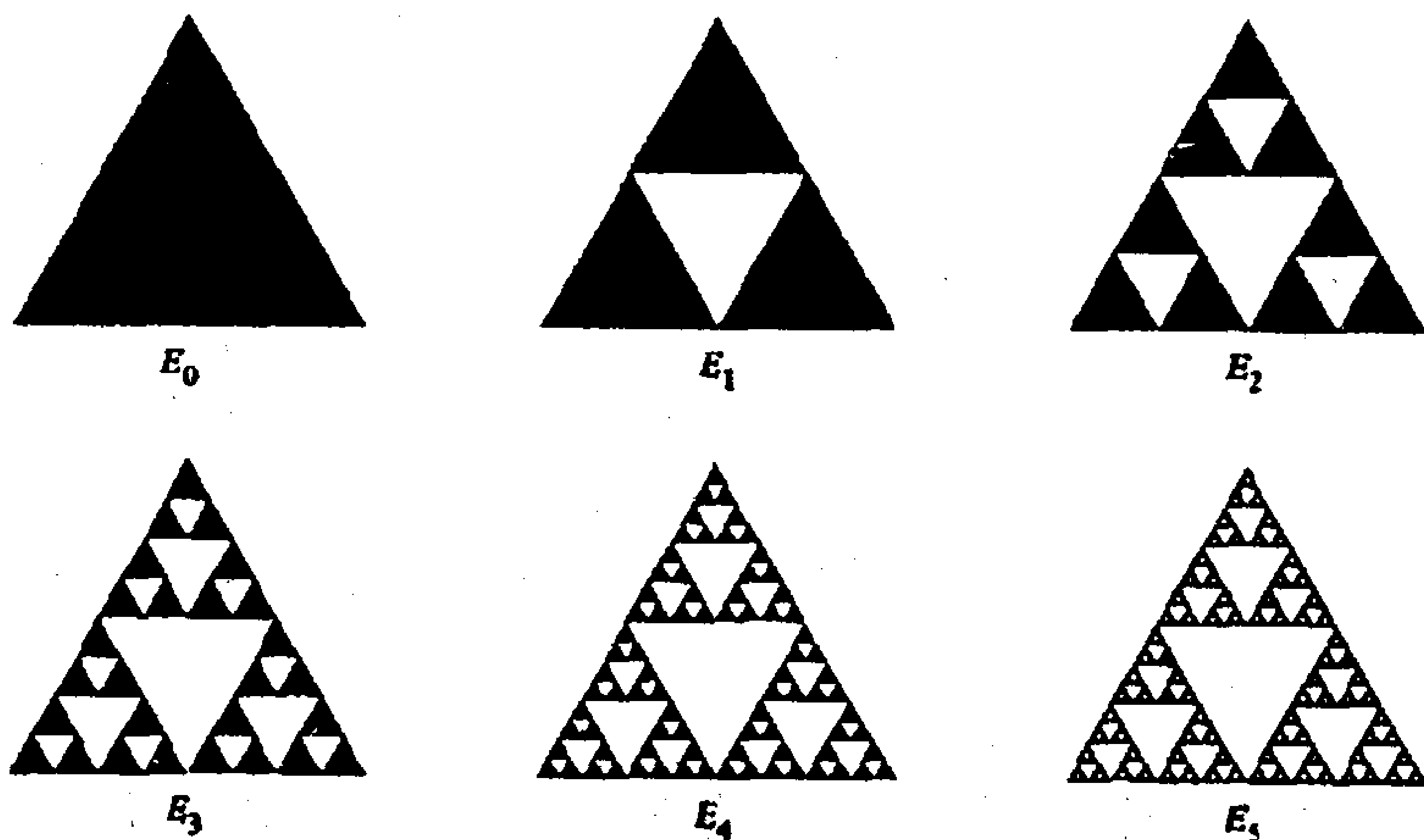



图 2.4 在 Sierpinski 三角形构造中的先分形的通常序列，满足 $E_k=F^k(A)$，这里 $A$ 是一个等边三角形

用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 记 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 前后相连的序列是方便的。特别如果 $\boldsymbol{i}=(i_1,\cdots,i_k)$，则 $\boldsymbol{i},i=(i_1,\cdots i_k,i)$。

记 $A\in S$，使得对任意 $i$，$F_i(A)\subset A$，则 $F(A)\subset A$。从式(2.28)可知，$E$ 是下面递减集合序列的交，

$$F^k(A)=\bigcup_{I_k} F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(A) \tag{2.36}$$

其中的并是对 $(i_1,\cdots,i_k)\in I_k$ 取的。而且，对任意 $(i_1,\cdots,i_k)$，$F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(A)\subset F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_{k-1}}(A)$，且 $|F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(A)|\leqslant r_{\max}|F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_{k-1}}(A)|$。于是对任意 $(i_1,i_2,\cdots)\in I_\infty$，当 $k\to\infty$ 时，$|F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(A)|\to 0$，且

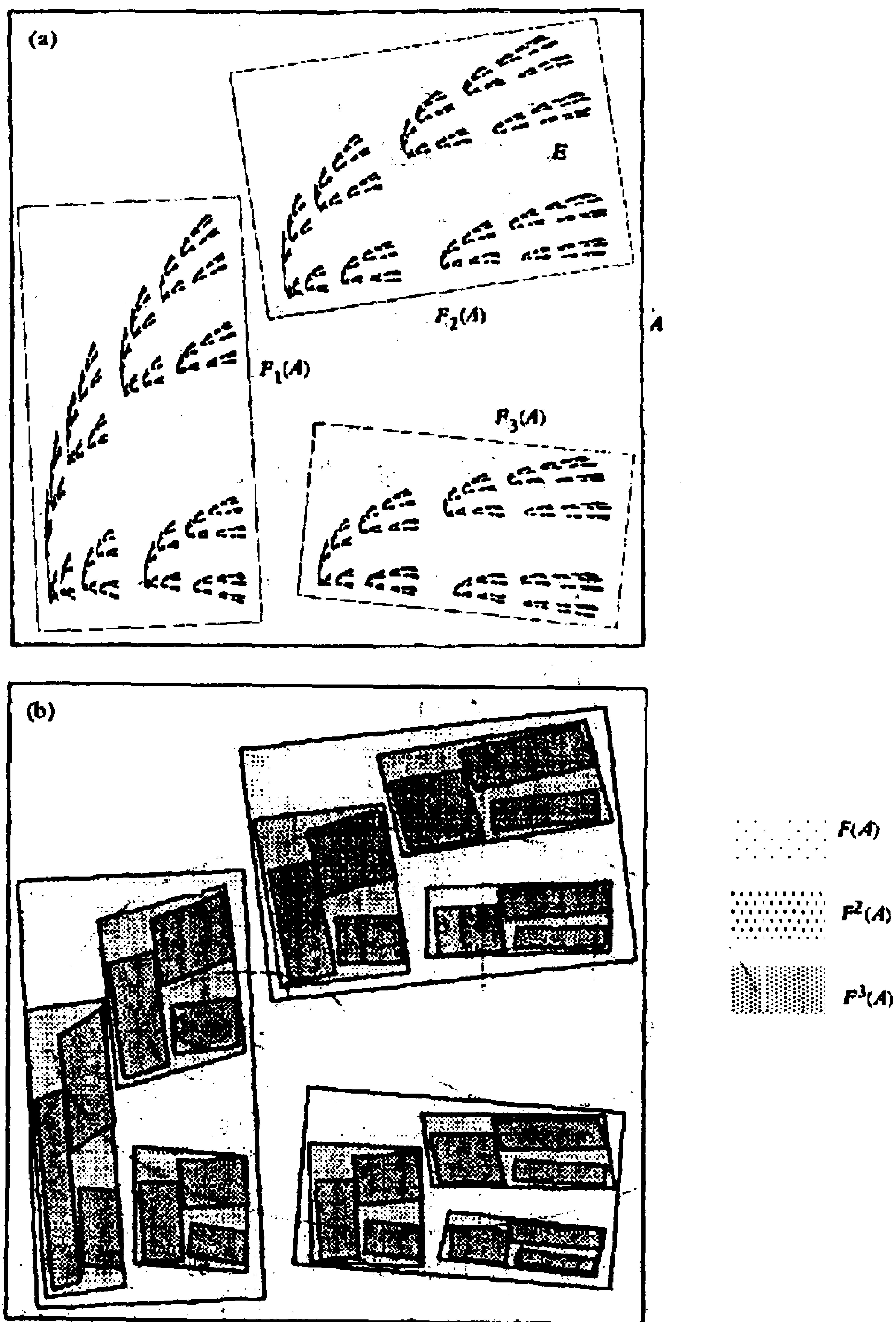



图 2.5 一个由三个仿射变换$\{F_1,F_2,F_3\}$组成的 IFS，在(a)中它们以明显的方式将正方形 $A$ 映射成矩形，(b)显示了先分形 $F^k(A)$ 收敛到 $E$

$$x_{i_1,i_2\cdots} \equiv \bigcap_{k=0}^{\infty} F_{i_1} \circ \cdots \circ F_{i_k}(A) \tag{2.37}$$

为这个递减集合序列交集的单点。由于 $E$ 的每个点都至少在一个这样的序列$(i_1,i_2\cdots) \in I_\infty$ 的交集里，故

$$E = \bigcup_{I_\infty} \{x_{i_1,i_2,\cdots}\} \tag{2.38}$$

可以断言，对$(i_1,\cdots,i_k) \in I$，$E$ 可由嵌套状集合$F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(A)$构造出来，见图 2.6，这类似于通常的三分康托集的构造。

这种组成部分 $F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(A)$ 和点 $x_{i_1,i_2,\cdots}$ 的编码在 IFS 的吸引子的分析中确实是非常有用的。为方便起见，对 $\boldsymbol{i} = (i_1,\cdots i_k) \in I$ 和 $A \subset X$，记

$$A_{\boldsymbol{i}} = A_{i_1,\cdots,i_k} = F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(A) \tag{2.39}$$

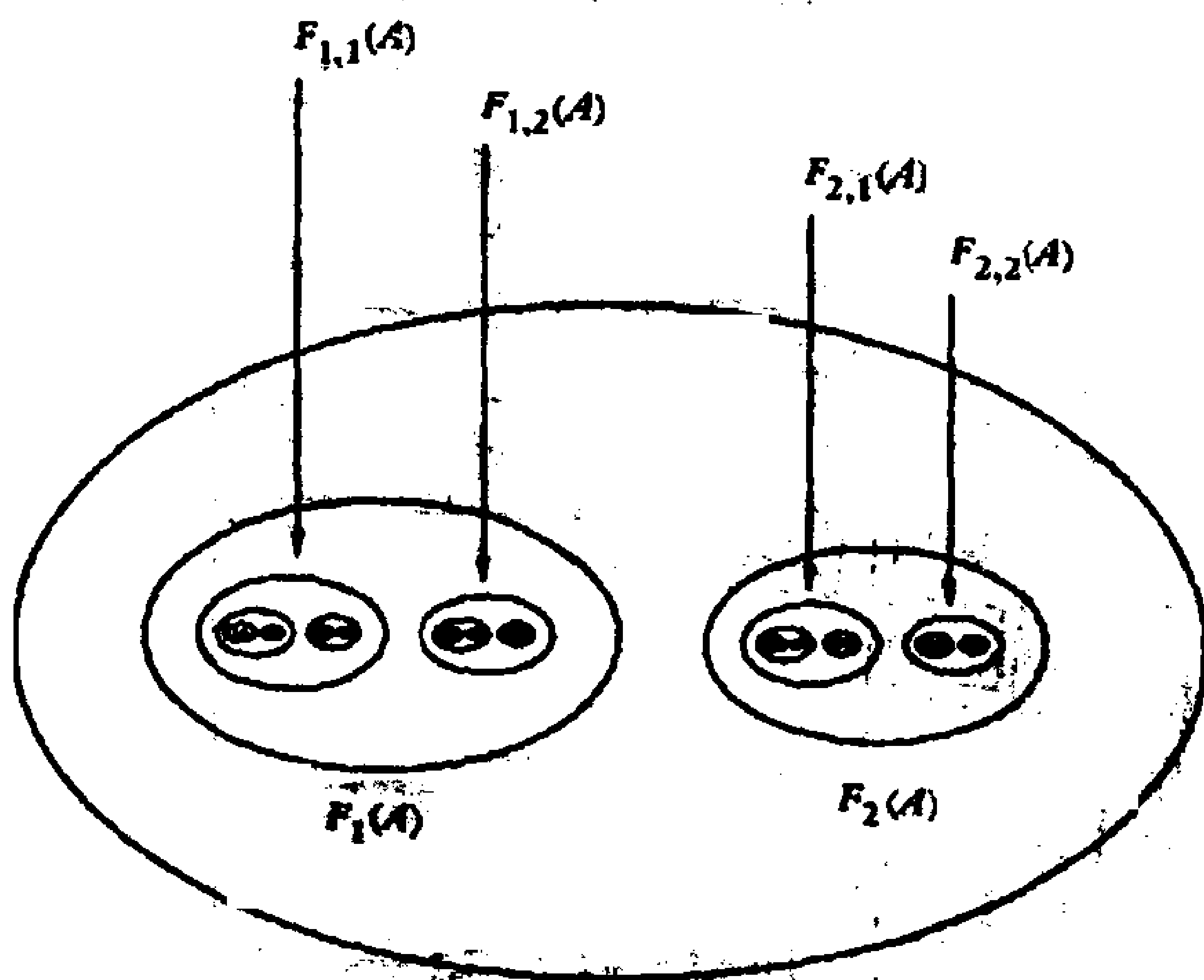



图 2.6 迭代函数系的表示。压缩映射 $F_1$ 和 $F_2$ 分别将大椭圆 $A$ 映射成区域 $F_1(A)$ 和 $F_2(A)$。集合 $F^k(A) = \bigcup F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(A)$递减到 IFS 的吸引子 $E$

在最简单的情形，集合 $F_1(A),\cdots,F_m(A)$ 可以是互不相交的。

在这种情况，式(2.36) 的并是不交的，且 $E$ 的每个点有一个如 $x_{i_1,i_2\cdots}$ 的唯一表示。事实上，如果这种情况发生，那么由于对任意满足 $F(A)\subset A$ 的 $A$, $E\subset A$ 成立，故 $F_1(E),\cdots F_m(E)$ 是互不相交的。当并 $E=\bigcup_{i=1}^{m}F_i(E)$ 是不交的，就称 IFS$\{F_1,\cdots,F_m\}$ 满足强分离条件。三分康托集的 IFS(2.24) 及其它 IFS 属于这种情形，它们都具有完全不连通的吸引子。然而强分离条件对许多想要达到的目的来说是太强了，因而常常只在弱分离条件下研究问题。称 IFS$\{F_1,\cdots,F_m\}$ 满足开集条件(OSC)，如果存在一个非空有界开集 $U\subset X$，使

$$\bigcup_{i=1}^{m}F_i(U)\subset U \tag{2.40}$$

且 $\bigcup_{i=1}^{m}F_i(U)$ 是不交并。对像 von Koch 曲线，见图 2.7，和 Sierpinski 垫这样的集合，容易验证 OSC 成立。

在特别好的情形，当 $F_1(X),\cdots,F_m(X)$ 互不相交时，可以定义 $f:\bigcup_{i=1}^{m}F_i(X)\to X$ 为

$$f(x)=F_i^{-1}(x) \qquad \text{当 } x\in F_i(x) \tag{2.41}$$

（如果 $F_i(X)$ 不是互不相交的，但强分离条件成立，那么这种情况相当于用一个适宜的子集甚至可以是 $E$ 本身替代 $X$。）对某些目的，研究单个映射 $f$ 比 $m$ 个映射 $F_i$ 要更方便一些，在第 3 和第 4 章就要大量利用这条途径。特别在 $E=f(E)=f^{-1}(E)$ 的意义下吸引子 $E$ 对 $f$ 是不变的。

有许多类型的 IFS 特别令人感兴趣。如果$\{F_1,\cdots F_m\}$ 是相似变换，吸引子 $E$ 称为自相似的；如果它们是仿射变换，$E$ 称为自仿射的；如果它们是保形变换（即对任意 $i$ 和任意 $x\in X$ 导数 $F_i'(x)$ 是相似的），那么 $E$ 称为自保形的：见图 0.1 和 0.2 的一些例子。在第 4 章将看到与某些动力系统相联系的“cookie-cutter”集是怎样等同于 IFS 的吸引子的。

在计算 IFS 的吸引子的维数方面已经付出了巨大的努力，各

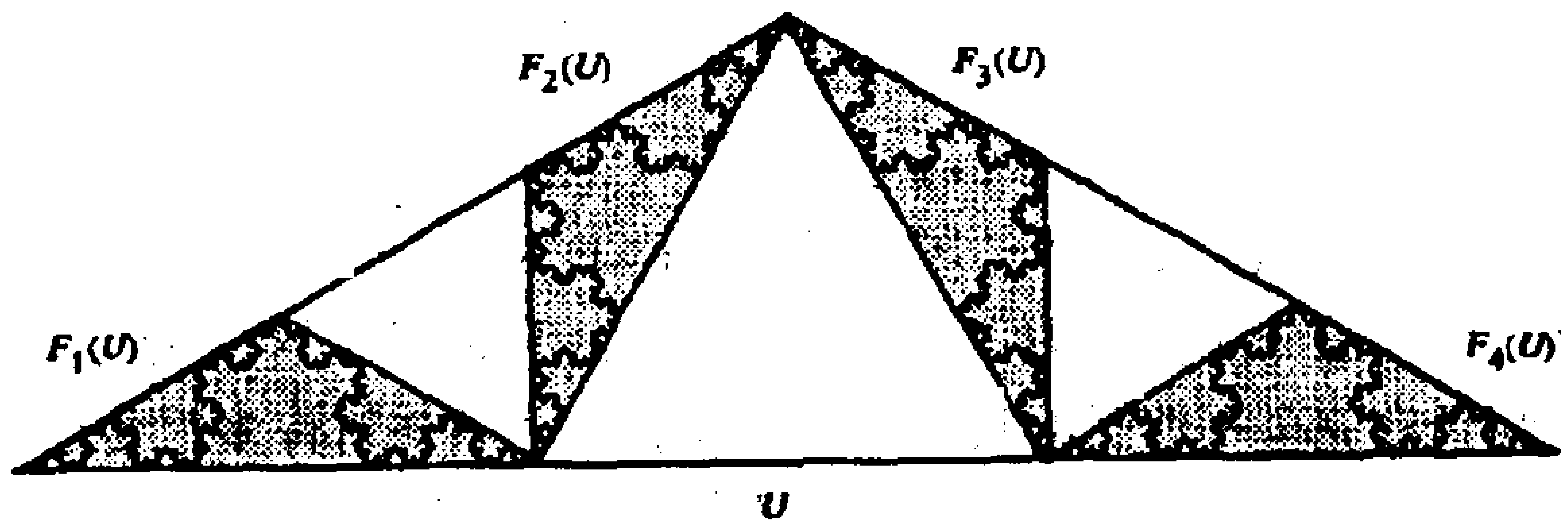



图 2.7 对 von Koch 曲线的开集条件. 开集 $U$ 是边界三角形的内部，且与 $F_1,\cdots,F_4$ 显然是相似的.

种各样的估计已在 FG 的第 9 章中给出，其它一些将在本书中得出。这里要回顾一下有关自相似集的维数公式，这也许是一个最重要的结果。

**定理 2.7**

设 $E$ 是一族相似变换$\{F_1,\cdots,F_m\}$ 的吸引子，这里 $F_i$ 有相似比 $r_i$。如果满足开集条件(2.40)，则 $\dim_H E=\dim_P E=\underline{\dim}_B E=\overline{\dim}_B E=s$，且 $0<\mathcal{H}^s(E)$, $\mathcal{P}^s(E)<\infty$，其中 $s$ 是下式的唯一正数解。

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^s=1 \tag{2.42}$$

**证明** 这个定理的标准证明在 FG 的定理 9.3 中给出。一个可供选择的处理方法，请参见本书后面的例子 3.3。□

由定理 2.7 可以立即得出，例如，von Koch 曲线的(盒和豪斯道夫)维数是 log4/log3, Sierpinski 垫的维数是 log8/log3, 这些集合均满足 OSC。当然，定理 2.7 特别对满足强分离条件的系统成立；由此给出了三分康托集的维数为 log2/log3。

迭代函数系的概念可以推广为支撑在系统的吸引子上的自然不变测度的定义。设$\{F_1,\cdots,F_m\}$ 是 $X\subset\mathbb{R}^n$ 上的一个 IFS, $p_1,\cdots,p_m$

是概率，对任意 $i$, $0\leqslant p_i\leqslant 1$, 且 $\sum_{i=1}^{m}p_i=1$, 这样一个系统称为概率迭代函数系。至少在强分离情形下，不难看出它是如何在 $E$ 上导出一个测度的。这里集合 $F_1(E),\cdots,F_m(E)$ 是不交的，所以对任意 $i\in I$, $E_i$的子集 $E_{i,1},\cdots,E_{i,m}$ 也是不交的。可以通过按比例 $p_1:p_2:\cdots:p_m$ 反复地把测度细分到这一嵌套状集合类上而定义出测度 $\mu$, 故

$$\mu(E_{i_1,i_2,\cdots,i_k})=p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k} \tag{2.43}$$

用通常的方法可以将它扩张成支撑为 $E$ 的波雷尔测度，见 1.3 节。下面的结果保证了在一般情形下，这种测度的存在性。

**定理 2.8**

设$\{F_1,\cdots,F_m\}$是 $X\subset\mathbb{R}^n$ 上与概率$\{p_1,\cdots,p_m\}$相关联的迭代函数系，则存在唯一的波雷尔概率测度 $\mu$( 满足 $\mu(X)=1$), 对任意波雷尔集 $A$ 满足

$$\mu(A)=\sum_{i=1}^{m}p_i\mu(F_i^{-1}(A)) \tag{2.44}$$

且对任意连续的 $g:X\to\mathbb{R}$

$$\int g(x)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{i=1}^{m}p_i\int g(F_i(x))\mathrm{d}\mu(x) \tag{2.45}$$

而且 $\mathrm{spt}\,\mu=E$, 这里 $E$ 是 $\mathrm{IFS}\{F_i:\ 1\leqslant i\leqslant m,\ p_i\neq 0\}$ 的吸引子。如满足强分离条件，则式(2.43) 成立。

**证明** 证明这个定理的最简单方法是利用压缩映射定理。设 $\mathcal{M}$是 $X$ 上有有界支撑的波雷尔概率测度族。赋予 $\mathcal{M}$ 上的距离为

$$d(v_1,v_2)=\sup\left\{\left|\int g\mathrm{d}v_1-\int g\mathrm{d}v_2\right|:\mathrm{Lip}\,g\leqslant 1\right\} \tag{2.46}$$

这里 Lip $g$是 $g$ 的李卜希兹常数，见式(1.1)。容易验证 $d$ 是 $\mathcal{M}$ 上的距离，也容易证明 $d$ 是完备距离。定义映射 $\psi:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$,对任

意波雷尔集 $A$:

$$\psi(v)(A)=\sum_{i=1}^{m} p_i v(F_i^{-1}(A)) \tag{2.47}$$

这意味着对每个可测函数 $g: X \to \mathbb{R}$,

$$\int g\mathrm{d}\psi(v)=\sum_{i=1}^{m} p_i \int (g\circ F_i)\mathrm{d}v \tag{2.48}$$

为了看清 $\psi$ 是 $\mathcal{M}$上的压缩，注意到对任意 $i$, $\mathrm{Lip}(r_i^{-1}(g\circ F_i))\leqslant 1$, 故

$$\begin{aligned}
d(\psi(v_1),\psi(v_2)) &= \sup\left\{\left|\int g\mathrm{d}\psi(v_1)-\int g\mathrm{d}\psi(v_2)\right| : \mathrm{Lip}\, g\leqslant 1\right\}\\
&= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{m} p_i\left(\int (g\circ F_i)\mathrm{d}v_1-\int (g\circ F_i)\mathrm{d}v_2\right)\right| : \mathrm{Lip}\, g\leqslant 1\right\}\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i \sup\left\{\left|\int (g\circ F_i)\mathrm{d}v_1-\int (g\circ F_i)\mathrm{d}v_2\right| : \mathrm{Lip}\, g\leqslant 1\right\}\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i \sup\left\{r_i\left|\int r_i^{-1}(g\circ F_i)\mathrm{d}v_1-\int r_i^{-1}(g\circ F_i)\mathrm{d}v_2\right| : \mathrm{Lip} g\leqslant 1\right\}\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i r_i \sup\left\{\left|\int g\mathrm{d}v_1-\int g\mathrm{d}v_2\right| : \mathrm{Lip}\, g\leqslant 1\right\}\\
&\leqslant r_{\max}\mathrm{d}(v_1,v_2)
\end{aligned}$$

其中 $r_i$ 和 $r_{\max}$ 如式 ( 2.22) 和式 ( 2.23) 中的一样。于是 $\psi$ 是 $\mathcal{M}$ 上的压缩，故由压缩映射定理知存在唯一的 $\mu\in\mathcal{M}$，满足 $\psi(\mu)=\mu$, 即满足式(2.44) 和式(2.45)。

由式(2.44) 知 $\mathrm{spt}\,\mu=\bigcup F_i(\mathrm{spt}\,\mu)$, 这里是对所有满足 $p_i\neq 0$ 的 $i$ 求并，故 $\mathrm{spt}\,\mu$ 是 IFS$\{F_i: 1\leqslant i\leqslant m,\ p_i\neq 0\}$ 的唯一非空紧吸引子. 最后，如果强分离条件成立，那么在式(2.44) 中取 $A$ 为 $E_{i_1,\cdots,i_k}$, 即得 $\mu(E_{i_1,\cdots,i_k})=p_{i_1}\mu(E_{i_2,\cdots,i_k})$, 所以再反复迭代可以得出式(2.43)。□

满足式(2.44)的概率测度 $\mu$ 称为关于这个概率 IFS 的不变测度。可以看出，强分离情形，在对任意波雷尔集 $A$, $\mu(f^{-1}(A))=\mu(A)$ 的意义下，$\mu$ 对由式(2.41)定义的映射 $f$ 是不变的。

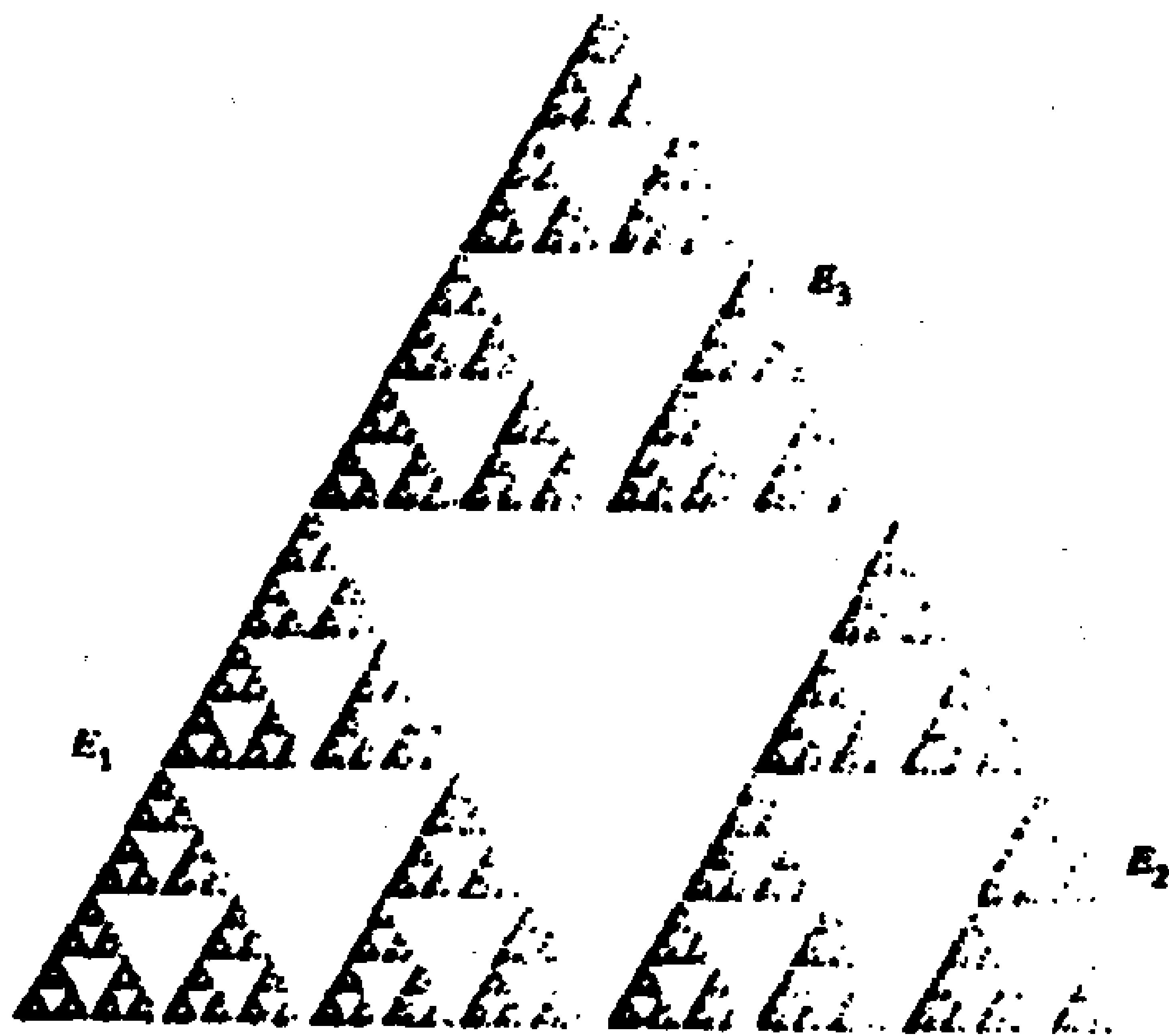



图 2.8 一个支撑在 Sierpinski 三角形上的自相似测度（测度的密度由点的疏密程度显示）。其中 $p_1=0.8$, $p_2=0.05$, $p_3=0.15$

关于构造不变测度 $\mu$，有一个随机算法。设 $(i_1,i_2,\cdots)$ 是随机序列，以概率 $p_i$ 使 $i_j=i$，且对每个 $j$, $i_j$ 相互独立。固定 $x\in \operatorname{spt}\mu$，对任意波雷尔集 $A$ 定义

$$\mu_x(A)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\#\{k'\leqslant k, \text{满足 } F_{i_{k'}}\circ\cdots\circ F_{i_1}(x)\in A\} \qquad (2.49)$$

那么对 $\mu$-几乎所有的 $x$, $\mu_x(A)=\mu(A)$，见练习 2.10。于是，在按概率 $p_i$ 选择 $F_i$ 的一个随机映射序列对 $x$ 的迭代产生的点集中，位于集合 $A$ 内的迭代点所占的比例近似于 $\mu(A)$，这个性质对不变测度的计算研究非常有用。

某些类型的不变测度特别令人感兴趣。由一族相似变换 $\{F_1,\cdots,F_m\}$ 得到的测度 $\mu$ 称为自相似测度。例如，取 $F_1$ 和 $F_2$ 如式(2.24)，且令 $p_1=p_2=\dfrac{1}{2}$，可以得到"康托测度"，它均匀地分布

在三分康托集上。又如 Sierpinski 三角形上的例子，见图 2.8。同样，由一族仿射变换得到的测度称为自仿射测度。

## 2.3 注记与参考文献

关于维数、密度和可求长性方面的材料可以在 FG 的第 2－5 章找到，较完整的讨论可见 Falconer(1985) 和 Mattila(1995a) 的书。测度的局部维数特性的详细处理，命题 2.2－2.4，由 Cutler (1986,1995) 给出。有趣的是，在 Tricot(1982) 提出填充测度的许多年前，豪斯道夫(1919) 就引进了冠以他名字的测度。

尽管 IFS 的许多理论是由 Moran(1946) 给出的，但用 IFS 描述集合的思想却来自于 Hutchinson(1981)。关于 IFS 的更详细的讨论可以看 FG 的第 9 章，Barnsley (1988)，Barnsley 和 Demko (1985) 和 Edgar(1990) 的论著。关于由某类 IFS 描述的集合的维数有相当多的文献。许多关于自相似集的结果可以在这些参考文献中找到，关于自仿射集可看 Bedford 和 Urbanski (1990)，Falconer (1988,1992) 和 Hueter 和 Lalley(1995) 的文章。

## 练　习

2.1 验证维数不等式(2.14)。

2.2 设$\{F_1,\cdots,F_m\}$是由满足开集条件的相似变换构成的 IFS，且具有维数为 $s$ 的吸引子 $E$。证明如果 $i\neq j$，则 $\mathcal{H}^s(F_i(E)\cap F_j(E))=0$。

2.3 求集合$\{(1/p, 1/q): p,q\in\mathbb{Z}^+\}\subset\mathbb{R}^2$ 的豪斯道夫和盒维数。

2.4 设 $E$ 是三分康托集。用命题 2.2 求出 $\mathcal{H}^s(E)$ 和 $\mathcal{P}^s(E)$ 的估计值，这里 $s=\log2/\log3$。

2.5 证明下密度$\underline{D}^s(E,x)$是 $x$ 的波雷尔函数，即对任意 $c\in\mathbb{R}$，$\{x:\underline{D}^s(E,x)\leqslant c\}$ 是波雷尔集。证明对上密度结论也正确。

2.6 验证密度映射性质(2.19)。

2.7 固定 $0<\lambda<\frac{1}{2}$，设 $F_1, F_2: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 由 $F_1(x)=\lambda x$，$F_2(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 给出，描述$\{F_1,F_2\}$的吸引子以及求出它的豪斯道夫和盒维数的表达式。

2.8 求出由图 0.2 描述的分形的 IFS，然后求它们的豪斯道夫和盒维数的表达式。

2.9 验证式(2.25)和式(2.46)定义的是距离。

2.10 证明由式(2.49)给出的随机测度 $\mu_x$，当 $\mathrm{spt}\,\mu$ 满足强分离条件时，对 $\mu$-几乎所有的 $x$ 等于不变测度 $\mu$。(提示：定义 $f:\mathrm{spt}\,\mu\to\mathrm{spt}\,\mu$，由式(2.41)给出，故 $f(x_{i_1,i_2,\cdots})=x_{i_2,i_3,\cdots}$)

2.11 验证如果 $E$ 是满足强分离条件的 IFS 的吸引子，那么存在数 $0<c_1, c_2<\infty$，对任意 $x\in E$ 和 $0<r\leqslant 1$，满足 $c_1r^s\leqslant\mathcal{H}^s(E\cap B(x,r))\leqslant c_2r^s$。推广这个结果到 IFS 满足开集条件的情形。(提示：寻找包含在 $E$ 中，且又包含 $E\cap B(x,r)$ 的 $E$ 的相似集合。)

# 第3章 研究维数的一些技巧

正如我们所见到的，有许多定义"分形维数"的方法。由于豪斯道夫维数是以测度为基础的，所以特别适合于发展一般的数学理论。另一方面，计盒维数在应用上常常更容易计算或估计。许多其它维数的定义仅仅适用于特别类型的集合，如曲线。分形的许多熟悉的例子，包括如 von Koch 曲线那样的自相似集，具有相同的豪斯道夫、下盒和上盒维数。然而，其它的分形，如自仿射集，它的豪斯道夫维数可能严格小于它的盒维数。

由于已提出的几乎所有维数定义得出的维数值都介于豪斯道夫维数和上盒维数之间，这两种维数也许使人感到特殊的兴趣。特别有用的是，如果能够知道一个集合的豪斯道夫和上盒维数相等，这时中间的定义也取这个值。在 3.1 节中给出了有关集合的"近似自相似"条件，在这些条件下保证了上述的维数相等，并且能对维数进行直接的计算。在 3.2 节中则通过补集的几何性质得到了集合的盒维数的表达式，并由此导出了下、上盒维数相等的判别准则。这些技巧给在 FG 中讨论的维数计算补充了更直接的途径。

## 3.1 隐含法

求一个集合的豪斯道夫维数的通常方法是，对 $s \geqslant 0$ 计算 $s$-维豪斯道夫测度 $\mathcal{H}^s(E)$ 并找出使测度值从无穷跳到 0 的 $s$ 值。这样的计算以及关于盒维数的相应计算可能是相当复杂的。本节讨论一种不同的途径，给出了不用先计算 $s$，而保证 $0 < \mathcal{H}^s(E)$ 或 $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ 的集合 $E$ 上的几何条件，其中 $s = \dim_H E$。利用这点通常容易求出 $s$。(例如，确定了三分康托集在维数值处有正的有

限豪斯道夫测度，则利用豪斯道夫测度的比例性质容易证明它的豪斯道夫维数是 log2/log3。)这一节中还给出了保证 $\dim_H E = \underline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B E$ 的类似的条件。

使我们可以不用直接计算而得到关于维数结论的定理称为隐含定理。这里证明了两个这样的定理，它们可以应用到满足下述条件的集合上：即集合的较小的部分与较大的部分"近似相似"。在这个意义下，可以通过李卜希兹函数确切地表述。定理 3.1 能够应用到这样的集合 $E$，它的每个小邻域能够在李卜希兹映射下映射到 $E$ 的一个较大的部分，其中李卜希兹常数由邻域的大小所确定，见图 3.1。

**定理 3.1**

设 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空紧子集，$a>0$ 和 $r_0>0$。假设对每个与 $E$ 相交且满足 $|U|<r_0$ 的集 $U$，存在映射 $g: E\cap U \to E$ 满足

$$a|U|^{-1}|x-y| \leqslant |g(x)-g(y)| \qquad (x,y\in E\cap U) \tag{3.1}$$

那么如果记 $s=\dim_H E$，则 $\mathcal{H}^s(E)\geqslant a^s>0$，且 $\underline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B E = s$。

**证明** 只要证明对任意 $d>0$，如果 $\mathcal{H}^d(E)<a^d$，则 $\overline{\dim}_B E<d$ 就足够了，因为由式(2.14)，$\dim_H E<d$ 成立。通过取 $d$ 任意地接近 $\dim_H E$，这意味着 $\overline{\dim}_B E \leqslant \dim_H E$，即知等号成立。

如果 $\mathcal{H}^d(E)<a^d$，存在与 $E$ 相交且 $|U_i|<\min\{\frac{1}{2}a,\ r_0\}$ 的集合 $U_1,\cdots,U_m$，满足 $E\subset \bigcup_{i=1}^m U_i$ 和 $\sum_{i=1}^m |U_i|^d<a^d$。(由于在估计这些和中取 $U_i$ 为开集，故由 $E$ 的紧性知存在有限的覆盖集族。)取 $t$ 接近 $d$，可以找到 $0<t<d$，满足

$$a^{-t}\sum_{i=1}^{m}|U_i|^t<1 \tag{3.2}$$

由假设存在 $g_i: E\cap U_i \to E (i=1,2,\cdots,m)$，满足

$$|x-y| \leqslant a^{-1}|U_i||g_i(x)-g_i(y)| \qquad (x,y\in E\cap U_i) \tag{3.3}$$

定义在适当的域上的这些函数的逆 $\{g_1^{-1},\cdots,g_m^{-1}\}$，有点像迭代函数

系一样。设 $I_k=\{(i_1,\cdots,i_k): 1\leqslant i_j\leqslant m\}$ 是由整数 $\{1,2,\cdots,m\}$ 组成的 $k$-项序列的集合，又设 $I=\bigcup_{k=0}^{\infty}I_k$。对每个 $\boldsymbol{i}=(i_1,\cdots,i_k)\in I_k$，定义

$$U_{i_1,\cdots,i_k}=g_{i_1}^{-1}(g_{i_2}^{-1}(\cdots(g_{i_k}^{-1}(E))\cdots))。$$

注意这些集合也许有些是空的，这是由于如果 $A\cap g_i(E\cap U_i)=\varnothing$，则有 $g_i^{-1}(A)=\varnothing$，但对每个 $k$ 仍然有 $E\subset\bigcup_{\boldsymbol{i}\in I_k}U_{\boldsymbol{i}}$。对 $x,y\in U_{i_1,\cdots,i_k}$，重复应用式(3.3)，则

$$|x-y|\leqslant a^{-k}|U_{i_1}|\cdots|U_{i_k}||g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}(x)-g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}(y)|$$

特别

$$|U_{i_1,\cdots,i_k}|\leqslant a^{-k}|U_{i_1}|\cdots|U_{i_k}||E|$$

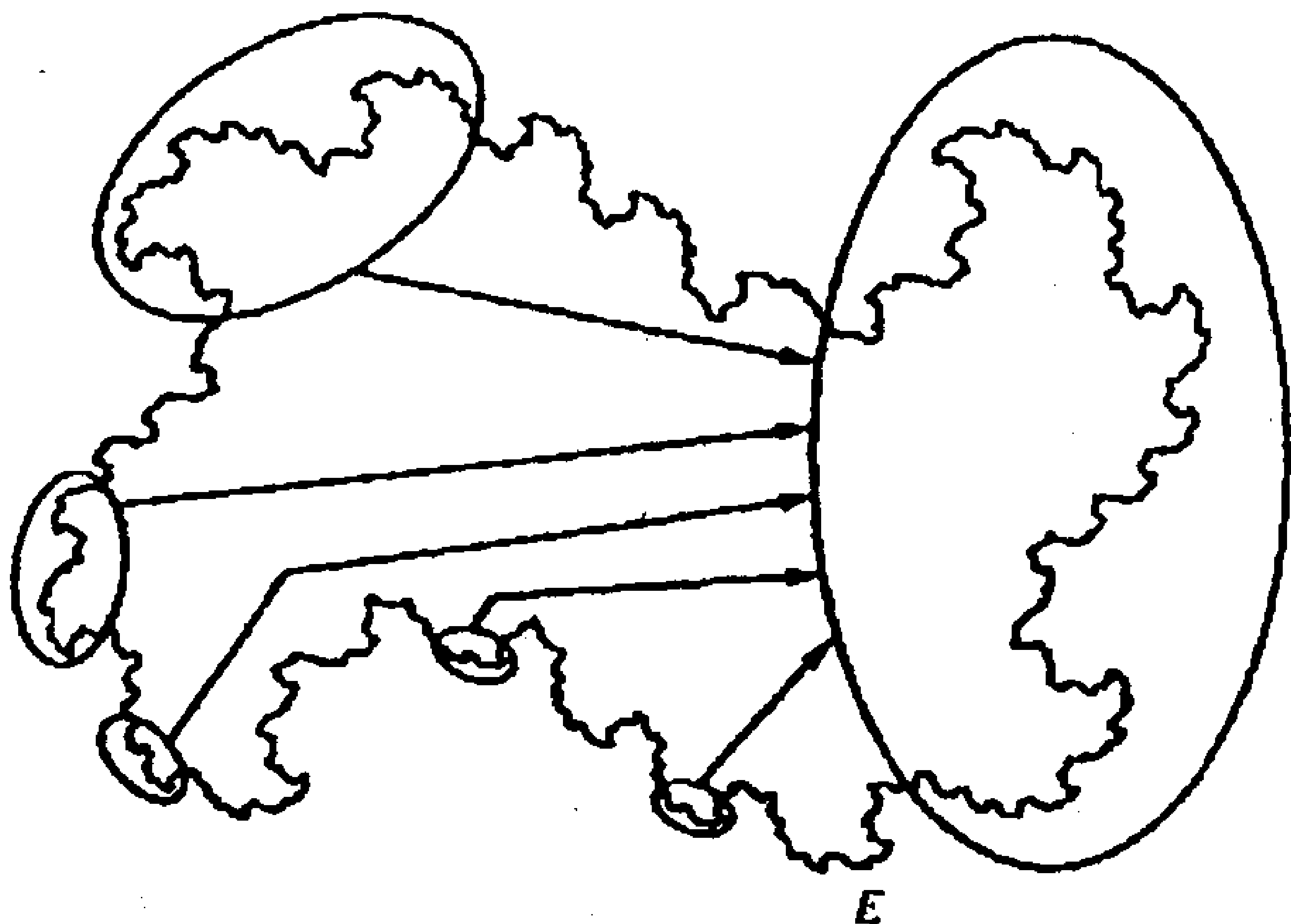



图3.1 满足定理3.1条件的集合 $E$，从 $E$ 的小邻域到 $E$ 上的映射，满足式(3.1)

设 $b=a^{-1}\min_{1\leqslant i\leqslant m}|U_i|$。给定 $r<|E|$，对任意 $x\in E$ 存在 $\boldsymbol{i}=(i_1,\cdots,i_k)\in I$ 满足 $x\in U_{\boldsymbol{i}}$ 和 $br\leqslant a^{-k}|U_{i_1}|\cdots|U_{i_k}||E|<r$。因此，用 $N(r)$ 表示直径最大为 $r$ 且能覆盖 $E$ 的集合的最少个数，利用式(3.2)则有

$$
\begin{aligned}
N(r) &\leqslant \#\{\boldsymbol{i} \in I : br \leqslant a^{-k}|U_{i_1}|\cdots|U_{i_k}||E|\} \\
&\leqslant \sum_{\boldsymbol{i} \in I}(br)^{-t}(a^{-k}|U_{i_1}|\cdots|U_{i_k}||E|)^t \\
&\leqslant |E|^t b^{-t} r^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} a^{-kt} \sum_{\boldsymbol{i} \in I_k}(|U_{i_1}|\cdots|U_{i_k}|)^t \\
&= |E|^t b^{-t} r^{-t} \sum_{k=0}^{\infty}\left(a^{-t}\sum_{i=1}^{m}|U_i|^t\right)^k \\
&\leqslant c_1 r^{-t}
\end{aligned}
$$

对合适的 $c_1 < \infty$ 成立。由式(2.2) 得 $\overline{\dim}_B E \leqslant t < d$，定理得证。□

前面定理的假设涉及到从集合的小邻域到它的较大部分的映射。下一个定理是它的补充，要求所有小邻域包括了整个集合的“不太压缩”的象点，见图 3.2。

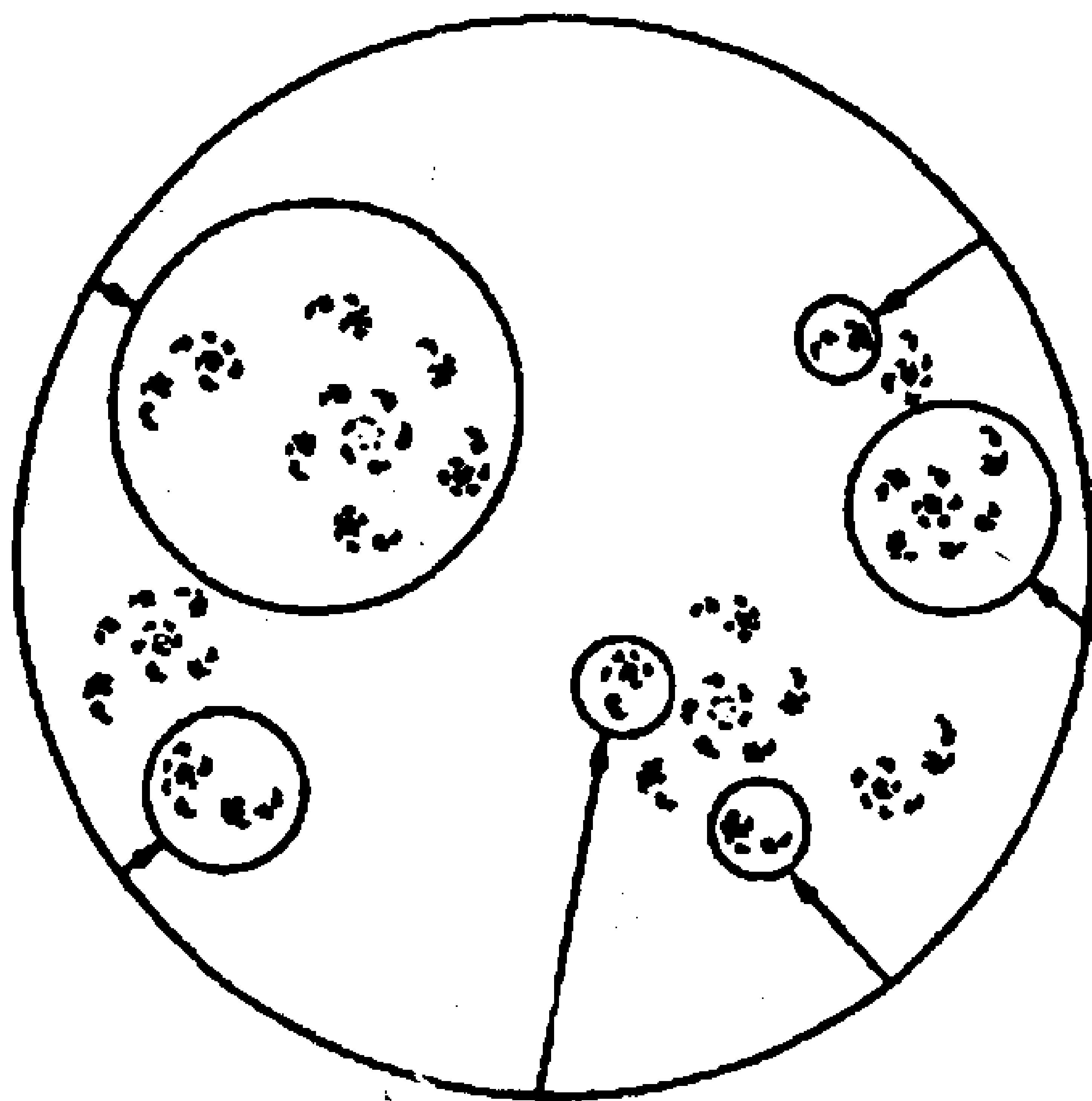


图 3.2　满足定理 3.2条件的集合 $E$，$E$ 到小球的映射满足式(3.4)

**定理 3.2**

设 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空紧子集，$a>0$，$r_0>0$。假设对每个中心在 $E$ 内，半径 $r<r_0$ 的闭球 $B$ 都存在映射 $g:E\to E\cap B$，满足

$$ar|x-y|\leqslant|g(x)-g(y)| \qquad (x,y\in E) \tag{3.4}$$

那么如果记 $s=\dim_H E$，则 $\mathcal{H}^s(E)\leqslant 4^s a^{-s}<\infty$，且 $\underline{\dim}_B E=\overline{\dim}_B E=s$。

**证明** 为了证明结论，用 $N(r)$ 表示半径为 $r$ 中心在 $E$ 内的不交闭球的最大个数。下面假设存在 $r<\min\{a^{-1},r_0\}$，使

$$N(r)>a^{-s}r^{-s} \tag{3.5}$$

并由此来引出矛盾。给定式(3.5)，则存在 $t>s$ 使

$$m\equiv N(r)>a^{-t}r^{-t}; \tag{3.6}$$

于是存在半径为 $r$ 中心在 $E$ 内的不交球族 $B_1,\cdots,B_m$。

由假设存在映射 $g_i:E\to E\cap B_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 满足

$$ar|x-y|\leqslant|g_i(x)-g_i(y)| \tag{3.7}$$

本质上，$\{g_1,\cdots,g_m\}$ 是以 $E$ 的某个子集为吸引子的 IFS(不必是压缩的)，可以用常规的方法找出这个吸引子的维数下界，从而也是 $E$ 的维数下界。

设 $d=\min_{i\neq j}\text{dist}(B_i,B_j)>0$，利用式(3.7) $(q-1)$ 次，注意到 $r<a^{-1}$，即有

$$\begin{aligned}\text{dist}(g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E),\ g_{j_1}\circ\cdots\circ g_{j_k}(E))&\geqslant(ar)^{q-1}\text{dist}(B_{i_q},B_{j_q})\\&\geqslant(ar)^q d\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 $q$ 是满足 $i_q\neq j_q$ 的最小整数。设 $\mu$ 是 $E$ 上的由重复分配(见式(1.19))定义的测度，对任意$(i_1,\cdots,i_k)$ 满足 $\mu(g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E))=m^{-k}$。设 $U$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的与 $E$ 相交且 $|U|<d$ 的任意子集，$k$ 是使

$$(ar)^{k+1}d\leqslant|U|<(ar)^k d \tag{3.9}$$

的最小整数。由式(3.8)$U$ 最多与一个 $k$ 项序列$(i_1,\cdots,i_k)$的 $g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E)$ 相交，故由式(3.6) 和式(3.9)

$$\mu(U) \leqslant m^{-k} < (ar)^{kt} \leqslant (dar)^{-t}|U|^t$$

由质量分布原理(命题 2.1 )即得 $\dim_H E \geqslant t > s$。

由此可以断定如果 $\dim_H E = s$，则对任意充分小的 $r$，$N(r) \leqslant a^{-s}r^{-s}$。这意味着 $\overline{\dim}_B E \leqslant s$，故由式(2.14) 即得等号成立。进一步，通过利用二倍半径的球，$E$ 能够被半径为 $2r$ 的 $N(r)$ 个球覆盖(否则，半径为 $r$ 中心在 $E$ 内的 $N(r)$ 个不交球不是最大族)。因此由 $\mathcal{H}^s_{4r}(E) \leqslant a^{-s}r^{-s}(4r)^s = 4^s a^{-s}$ 知 $\mathcal{H}^s(E) \leqslant 4^s a^{-s}$。□

定理 3.2 的假设也蕴涵着 $\mathcal{P}^s(E) < \infty$，见练习 3.2。

用三分康托集可以非常简单地说明如何应用这些定理。如果 $U$ 与 $E$ 相交且对 $k \in \mathbb{Z}^+$，$3^{-k-1} \leqslant |U| < 3^{-k}$，那么存在相似比为 $3^k$ 的从 $U \cap E$ 到 $E$ 的明显的相似变换，故式(3.1) 成立，此时 $a = \frac{1}{3}$。类似地，如果 $B$ 是中心在 $E$ 内长度为 $2r$ 的区间(一维球)，这里 $r$ 满足 $3^{-k} \leqslant r < 3^{-k+1}$，则存在一个相似比为 $3^{-k}$ 的从 $E$ 到 $E \cap B$ 的相似变换，给出 $a = \frac{1}{3}$ 的式(3.4)。由定理 3.1 和 3.2 可以断言，当 $s = \dim_H E$ 时，$\underline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B E = s$ 且 $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$。记 $E_L$ 和 $E_R$ 为康托集 $E$ 的左边和右边“部分”，由豪斯道夫测度的比例性质(2.13)，见图 2.3，可以得到

$$\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(E_L) + \mathcal{H}^s(E_R) = 3^{-s}\mathcal{H}^s(E) + 3^{-s}\mathcal{H}^s(E)$$

于是 $1 = 2 \times 3^{-s}$，立即得出了三分康托集的维数 $s = \log 2/\log 3$。

下一个例子把上述论证推广到更一般的自相似集上，提供了在强分离条件下定理 2.6 的一个可供选择的证明。

**系 3.3 (自相似集)**

设 $E$ 是由相似变换族 $\{F_1, \cdots F_m\}$ 构成的 IFS 定义的自相似集，这里 $F_i$ 的相似比是 $r_i$，且 $0 < r_i < 1$。如果 $\dim_H E = s$，则 $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ 且 $\underline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B E = s$。进一步，如果 $\{F_i(E)\}_{i=1}^m$ 是不交集，则 $0 < \mathcal{H}^s(E)$，且 $s$ 满足 $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$。

**证明** 记$r_{\min}=\min_{1\leqslant i\leqslant m}r_i$。设$x\in E$和$r\leqslant|E|$，对任意$k$存在(不一定唯一)满足$x\in F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(E)$的序列$(i_1,i_2,\cdots)$。选择$k$，使$r_{\min}r<r_{i_1}\cdots r_{i_k}|E|\leqslant r$。那么$F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}: E\to E\cap B(x,r)$是相似比至少为$r_{\min}|E|^{-1}r$的相似变换，所以由定理3.2即得维数的等式及$\mathcal{H}^s(E)<\infty$。

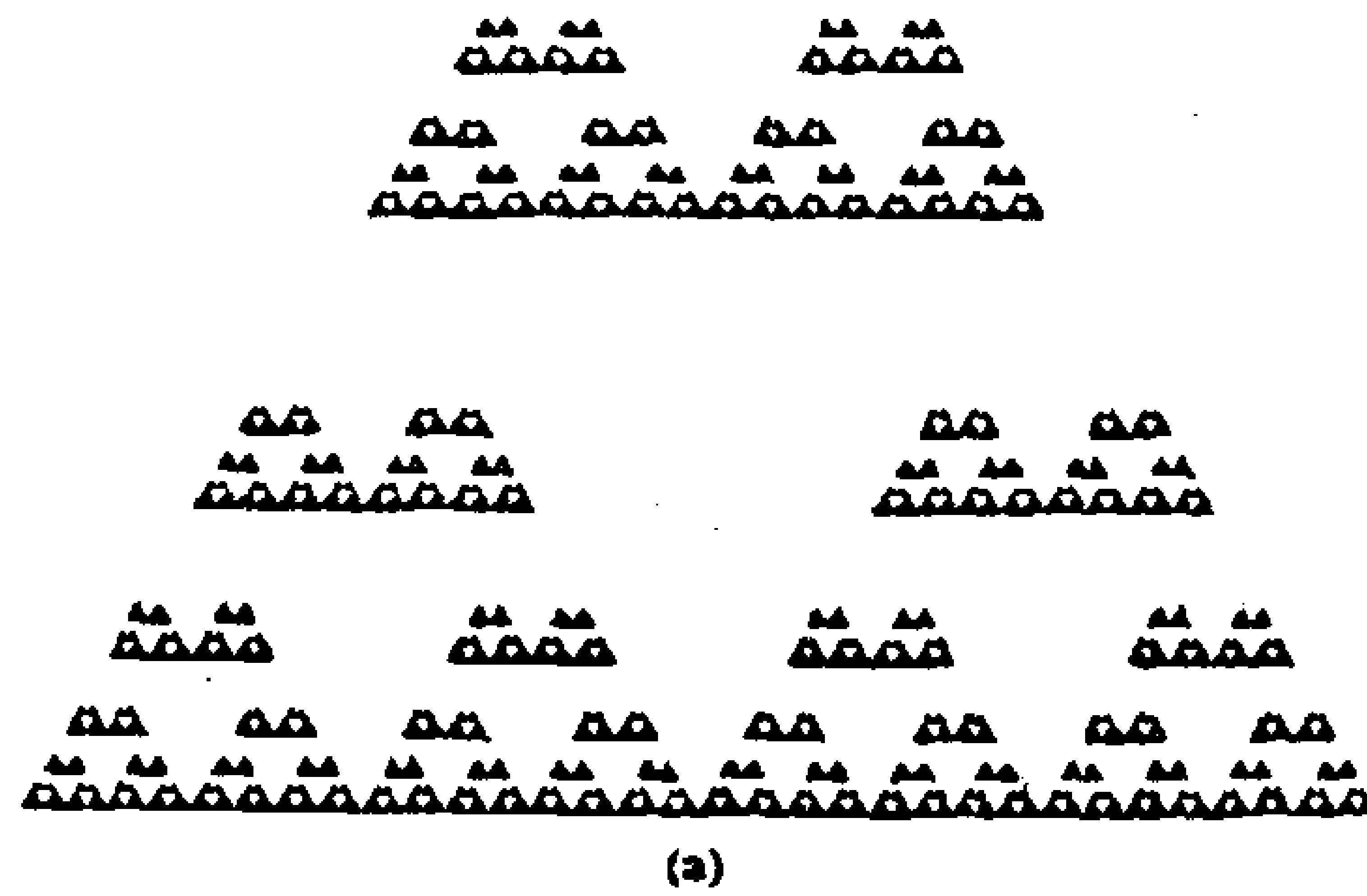
现在假设$\min_{i\neq j}\mathrm{dist}(F_i(E),F_j(E))=d>0$，那么如果$(j_1,\cdots,j_k)$与$(i_1,\cdots,i_k)$不等，则有$\mathrm{dist}(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(E),F_{j_1}\circ\cdots\circ F_{j_k}(E))\geqslant r_{i_1}\cdots r_{i_{k-1}}d$，如果$U$与$E$相交且$|U|<d$，$x\in E\cap U$，可以找到$(i_1,\cdots,i_k)$，使$x\in F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(E)$及$dr_{i_1}\cdots r_{i_k}\leqslant|U|<dr_{i_1}\cdots r_{i_{k-1}}$。于是$U$对任意$(j_1,\cdots,j_k)\neq(i_1,\cdots,i_k)$与$F_{j_1}\circ\cdots\circ F_{j_k}(E)$不交，且满足$E\cap U\subset F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(E)$。因此$(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k})^{-1}: E\cap U\to E$是一个具有相似比$(r_{i_1}\cdots r_{i_k})^{-1}\geqslant d|U|^{-1}$的相似变换，由定理3.1又一次得出$0<\mathcal{H}^s(E)$及关于维数的等式。

最后，在不相交情形，由豪斯道夫测度的比例性质(2.13),又可得出$\mathcal{H}^s(E)=\sum_{i=1}^m\mathcal{H}^s(F_i(E))=\sum_{i=1}^m r_i^s\,\mathcal{H}^s(E)$；由于$0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$，即得$1=\sum_{i=1}^m r_i^s$，这里$s=\dim_{\mathrm{H}}E$。□

事实上如果$\{F_1,\cdots,F_m\}$满足开集条件，则结论$0<\mathcal{H}^s(E)$是成立的，这可由定理3.1的加强形式用类似的方法推出，见练习3.3。

注意对自相似集$E$，不需要IFS上的任何分离条件就有$\dim_{\mathrm{H}}E=\underline{\dim}_{\mathrm{B}}E=\overline{\dim}_{\mathrm{B}}E$和$\mathcal{H}^s(E)<\infty$。甚至当集合$\{F_i(E)\}$实质性地充分相交，上述结果仍成立，而此时维数严格地小于$\sum_{i=1}^m r_i^s=1$的解。

对上面证明进行平凡的修改就使隐含定理可以应用到自相似集的许多子集上。在下面的系中，式(3.10)的集$A$称为上自相似的，而式(3.11)的集$A$则称为下自相似的，见图3.3。


(a)

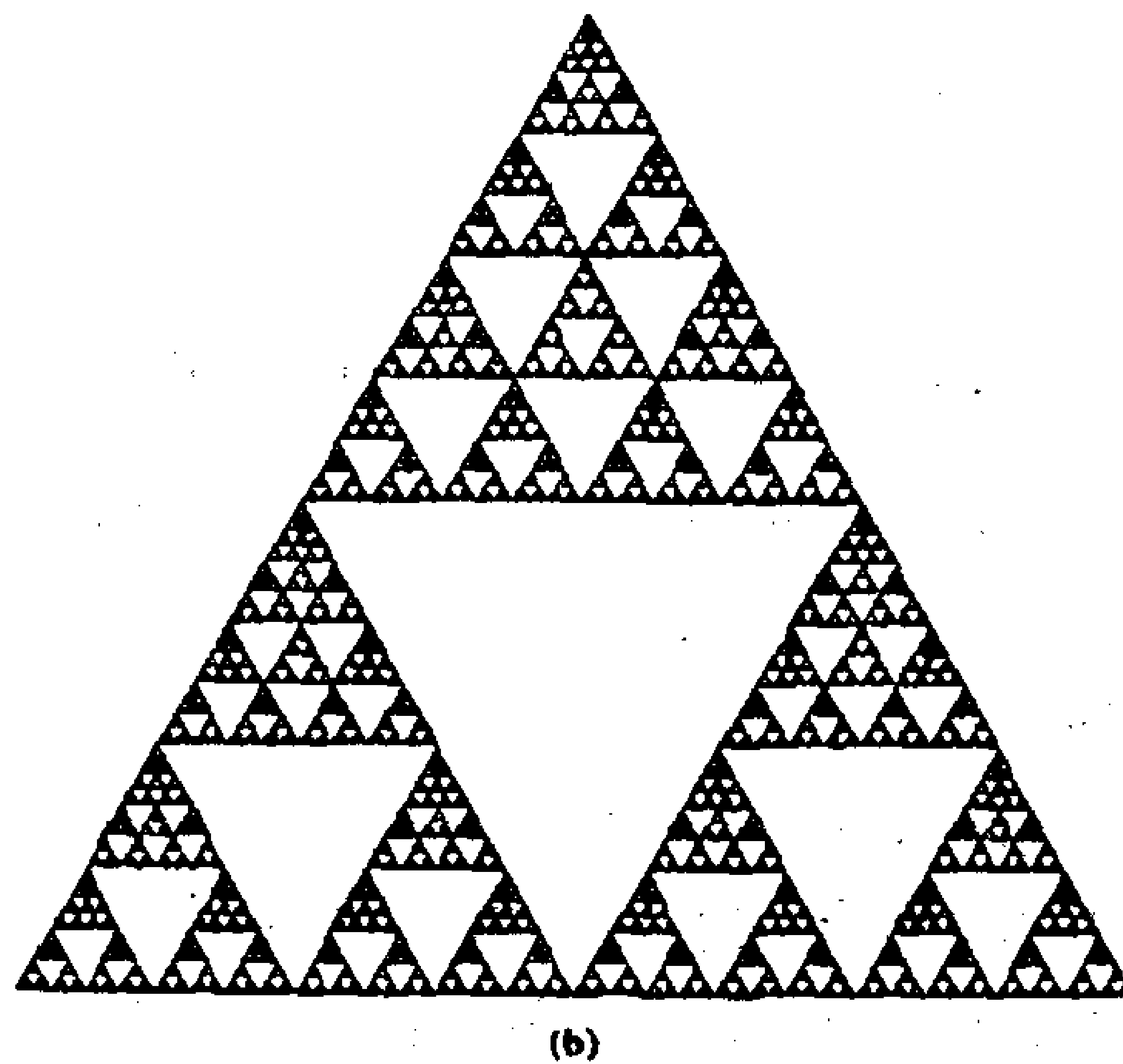

(b)

图 3.3 基于 Sierpinski 三角形的下自相似集的例子(a) 及上自相似集的例子 (b)

## 系 3.4 (上自相似和下自相似集)

设$\{F_1,\cdots,F_m\}$是以 $E$ 为吸引子的相似变换族。

(a) 如果 $A$ 是满足

$$A \supset \bigcup_{i=1}^{m} F_i(A) \tag{3.10}$$

的 $E$ 的非空紧子集，且 $\dim_H A = s$，则 $\underline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B A = s$，并且 $\mathcal{H}^s(A) < \infty$。

(b) 如果 $A$ 是满足

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} F_i(A) \tag{3.11}$$

的非空紧集，且 $\dim_H A = s$，则只要集合 $\{F_i(E)\}_{i=1}^{m}$ 是不交的，则 $\underline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B A = s$ 且 $\mathcal{H}^s(A) > 0$。

**证明** (a) 如果 $x \in A \subset E$，且 $r$ 充分小，在系 3.3 的证明中定义的映射 $F_{i_1} \circ \cdots \circ F_{i_k}$：$A \to A \cap B(x,r)$ 的限制满足定理 3.2 的条件，即得结论。

(b) 条件(3.11) 蕴涵着 $A \subset E$( 见式 2.28)，于是如果 $U$ 是与 $A$ 相交且直径充分小的集合，由系 3.3 中证明知，映射$(F_{i_1} \circ \cdots \circ F_{i_k})^{-1}$ 的限制：$A \cap U \to A$ 满足定理 3.1 的条件，即得结论。□

推广了自相似集的有向图集，给出了另一个例子。设 $\mathcal{V}$ 是标号为$\{1,2,\cdots,q\}$ 的"顶点"集，$\mathcal{E}$ 是"有向边"的集合，它的每条边开始和结束都在顶点，所以$(\mathcal{V},\mathcal{E})$ 是一个有向图。一对顶点可能由几条边联结，同样允许边的起点和终点在同一个顶点。记 $\mathcal{E}_{i,j}$ 是从顶点 $i$ 到顶点 $j$ 的边的集合，$\mathcal{E}_{i,j}^k$ 是 $k$ 条边序列$(e_1,e_2,\cdots,e_k)$ 的集合，这 $k$ 条边从顶点 $i$ 到顶点 $j$ 形成一条有向路径。假设可传递条件成立，即存在正整数 $p_0$，使对任意 $i,j$ 存在满足 $1 \leqslant p \leqslant p_0$ 的整数 $p$，使 $\mathcal{E}_{i,j}^p$ 是非空的，也就是在图中存在联结每对顶点的道路。

对每条边 $e \in \mathcal{E}$，设 $F_e$：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$是相似比为 $r_e$ 的相似压缩变换，其中 $0 < r_e < 1$，则存在唯一的非空紧集族 $E_1,\cdots,E_q$，使

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{q} \bigcup_{e \in \mathcal{E}_{i,j}} F_e(E_j) \tag{3.12}$$

(这个结论的证明类似于定理 2.6 中对常规的 IFS 的证明，见练

习 3.6)。压缩集$\{F_e: e \in \mathcal{E}\}$称为有向图迭代函数系，集合$\{E_1,\cdots,E_q\}$称为有向图集族。由式(3.12)的迭代，可见

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{q} \bigcup_{(e_1,\cdots,e_k)\in \mathcal{E}^k_{i,j}} F_{e_1}\circ\cdots\circ F_{e_k}(E_j) \tag{3.13}$$

设式(3.12)中的并对所有 $i$ 是不交的，这个分离条件也许比开集条件放松。

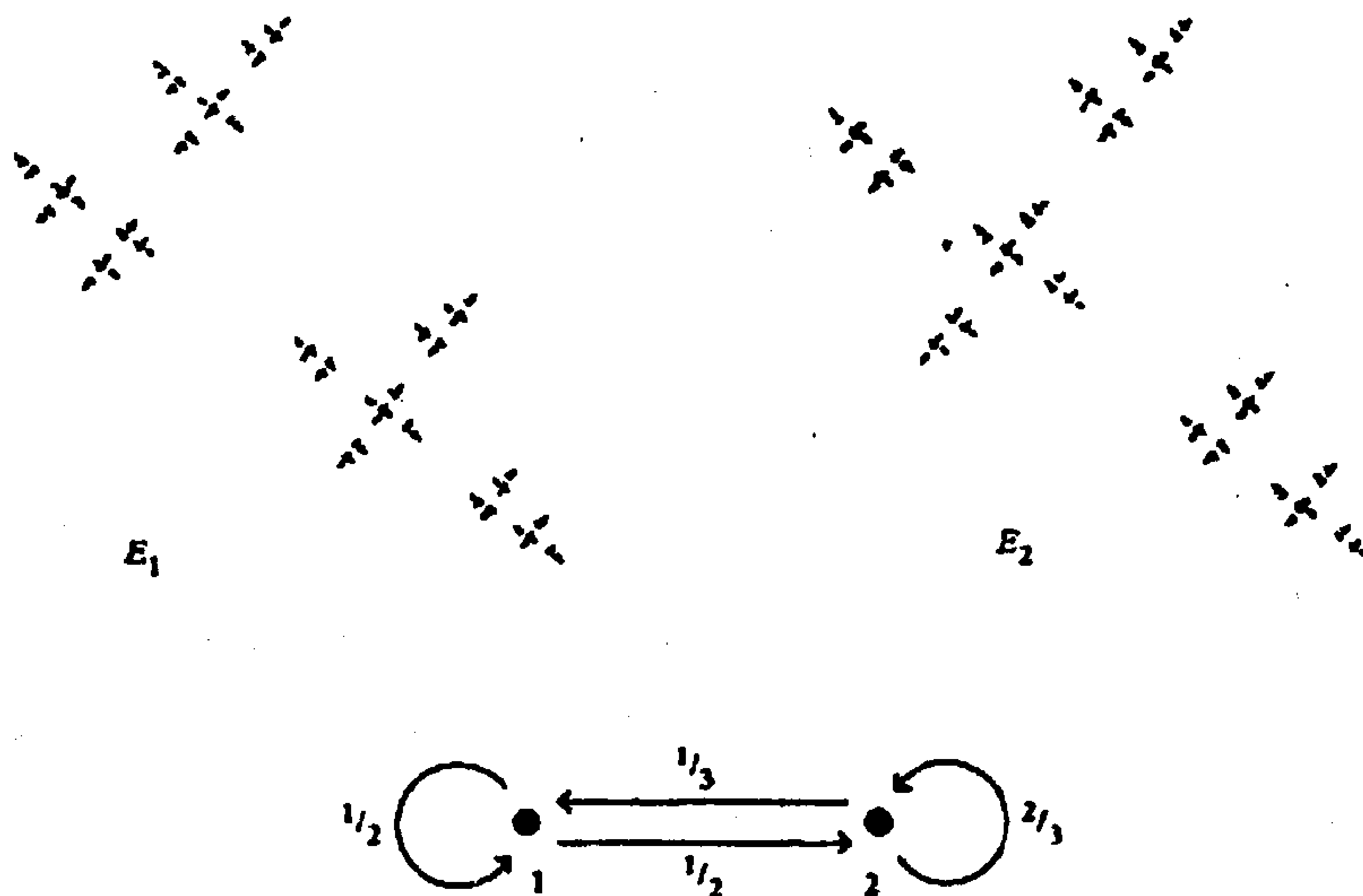



图 3.4 一对用相似比标记的方向图集，即 $E_1$ 是由自己旋转 90° 的比例为 $\frac{1}{2}$ 的缩影与 $E_2$ 的比例为 $\frac{1}{2}$ 的缩影组成，而 $E_2$ 由自己旋转 90° 的比例为 $\frac{2}{3}$ 的缩影与 $E_1$ 的比例为 $\frac{1}{3}$ 的缩影组成

通过与第$(i,j)$通路

$$A^{(s)}_{i,j} = \sum_{e\in\mathcal{E}_{i,j}} r^s_e \tag{3.14}$$

相对应的 $q\times q$ 矩阵 $A^{(s)}$，将求出有向图集的维数.记 $\rho(A^{(s)})$为 $A^{(s)}$ 的最大的特征值 (绝对值)，它必定是实数。事实上 $\rho(A^{(s)}) =$

$\lim_{k\to\infty}\|(A^{(s)})^k\|^{1/k}$，它是$A^{(s)}$的谱半径。可以证明(见练习3.7) $\rho(A^{(s)})$关于$s$是严格递减的，故存在唯一正数$s$满足$\rho(A^{(s)})=1$。一旦确定了(在系3.5中)对任意$i$, $0<\mathcal{H}^s(E_i)<\infty$的这个容易导出的事实，即知这个$s$值实际上是每个$E_i$的维数。

在图3.4展示了一对有向图$E_1,E_2$。在这种情况下，

$$A^{(s)}=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^s & \left(\frac{1}{2}\right)^s\\ \left(\frac{1}{3}\right)^s & \left(\frac{2}{3}\right)^s\end{pmatrix}$$

容易验证$\rho(A^{(1)})=1$，故由系3.5知对$i=1,2$, $\dim_H E_i=\dim_B E_i=1$。

下面的关于有向图集的分析与在系3.3中对自相似集的讨论类似。

**系 3.5 (有向图集)**

设$E_1,\cdots,E_q$是如上叙述的有向图集族，则存在一个数$s$，对所有$i=1,\cdots,q$，满足$\dim_H E_i=\underline{\dim}_B E_i=\overline{\dim}_B E_i=s$及$0<\mathcal{H}^s(E_i)<\infty$。且$s$是满足$\rho(A^{(s)})=1$的唯一正数，这里$A^{(s)}$由式(3.14)定义。

**证明**　可传递条件的推论是对每一对$i,j$ $(1\leqslant i,j\leqslant m)$，及$(e_1,\cdots,e_p)\in\mathcal{E}^p_{i,j}$和$p\leqslant p_0$，存在相似变换

$$F_{e_1}\circ\cdots\circ F_{e_p}: E_j\to E_i \tag{3.15}$$

特别，由此可以推出对所有$i,j$, $\dim_H E_i\geqslant\dim_H E_j$，故存在一个数$s$，对任意$i$满足$\dim_H E_i=s$。

设$r_{\min}=\min_{e\in\mathcal{E}_{i,j}} r_e$。给定$x\in E_i$和$r\leqslant|E_i|$，由式(3.13)存在整数$j$和一个边序列$(e_1,\cdots,e_k)\in\mathcal{E}^k_{i,j}$，满足$x\in F_{e_1}\circ\cdots\circ F_{e_k}(E_j)$。选择$k$使$rr_{\min}|E_i|^{-1}<r_{e_1}r_{e_2}\cdots r_{e_k}\leqslant r\ |E_i|^{-1}$成立。由式(3.15)可以找到$(e_{k+1},\cdots,e_{k+p})\in\mathcal{E}^p_{j,i}$，这里$p\leqslant p_0$，使$x\in F_{e_1}\circ\cdots\circ F_{e_{k+p}}(E_i)$。由于$r\,|E_i|^{-1}\geqslant r_{e_1}\cdots r_{e_k}r_{e_{k+1}}\cdots r_{e_{k+p}}>r\,r_{\min}|E_i|^{-1}r_{\min}^{p_0}$，所以$F_{e_1}\circ\cdots\circ F_{e_{k+p}}: E_i\to E_i\cap B(x,r)$是相似比至少为$rr_{\min}^{p_0+1}|E_i|^{-1}$的相似变换。由定理3.2，$s=\dim_H E_i=\underline{\dim}_B E_i=\overline{\dim}_B E_i$，且$\mathcal{H}^s(E_i)<\infty$。

现在固定 $i$，记 $d=\min \operatorname{dist}(F_e(E_j),F_{e'}(E_{j'}))>0$，这里最小值是取遍所有满足 $e\in\mathcal{E}_{i,j}$ 和 $e'\in\mathcal{E}_{i,j'}$ 的相异的 $e$ 和 $e'$。那么对不同的边序列 $(e_1,\cdots,e_k)\in\mathcal{E}_{i,j}^k$ 和 $(e_1',\cdots,e_k')\in\mathcal{E}_{i,j'}^k$，

$$\operatorname{dist}(F_{e_1}\circ\cdots\circ F_{e_k}(E_j),\ F_{e_1'}\circ\cdots\circ F_{e_k'}(E_{j'}))\geqslant dr_{e_1}\cdots r_{e_{k-1}} \tag{3.16}$$

如果 $U$ 与 $E_i$ 相交，且 $|U|<d$ 和 $x\in E_i\cap U$；由式(3.13) 可以找到 $j,k$ 和 $(e_1,\cdots,e_k)\in\mathcal{E}_{i,j}^k$，满足 $x\in F_{e_1}\circ\cdots\circ F_{e_k}(E_j)$ 和 $dr_{e_1}\cdots r_{e_k}\leqslant|U|<dr_{e_1}\cdots r_{e_{k-1}}$。由式(3.13) 和式(3.16) $E_i\cap U\subset F_{e_1}\circ\cdots\circ F_{e_k}(E_j)$，即 $(F_{e_1}\circ\cdots\circ F_{e_k})^{-1}:E_i\cap U\to E_j$。利用式(3.15) 可以找到 $F_{e_{k+1}}\circ\cdots\circ F_{e_{k+p}}:E_j\to E_i$，其中 $p\leqslant p_0$，故 $(F_{e_{k+1}}\circ\cdots\circ F_{e_{k+p}})(F_{e_1}\circ\cdots\circ F_{e_k})^{-1}$: $E_i\cap U\to E_i$ 是一个相似比为 $(r_{e_{k+1}}\cdots r_{e_{k+p}})(r_{e_1}\cdots r_{e_k})^{-1}\geqslant r_{\min}^{p_0}d|U|^{-1}$ 的相似变换。由定理 3.1 知 $\mathcal{H}^s(E_i)>0$。

设在式(3.12) 中的并是不交的，则对每个 $i$，

$$\mathcal{H}^s(E_i)=\sum_{j=1}^{q}\sum_{e\in\mathcal{E}_{i,j}}\mathcal{H}^s(F_e(E_j))$$

$$=\sum_{j=1}^{q}\sum_{e\in\mathcal{E}_{i,j}}r_e^s\mathcal{H}^s(E_j)$$

写成矩阵形式是

$$\begin{pmatrix}\mathcal{H}^s(E_1)\\ \vdots\\ \mathcal{H}^s(E_q)\end{pmatrix}=A^{(s)}\begin{pmatrix}\mathcal{H}^s(E_1)\\ \vdots\\ \mathcal{H}^s(E_q)\end{pmatrix}$$

这里 $A^{(s)}$ 是由式(3.14) 给出的矩阵。由 Perron－Frobenius 定理，任何具有非负值的矩阵都有由非负分量构成的特征向量，它在数量乘积范围内是唯一的，并与唯一的具有最大绝对值的特征值相对应。在这种情形，取 $s=\dim_H E_i$(对所有 $i$)，可知 $(\mathcal{H}^s(E_1),\cdots,\mathcal{H}^s(E_q))^T$ 是 $A^{(s)}$ 的具有正的分量和特征值 1 的特征向量，因此它一定是最大的特征值。于是 $\rho(A^{(s)})=1$。由于 $\rho(A^{(s)})$ 关于 $s$ 严格递减(见练习 3.7)，故 $s$ 是完全由这个条件所确定的。□

3 在系 4.6 中将给出这些隐含法在 cookie-cutter 集上的一个应用。

## 3.2 剪切集的计盒维数

在本节中要研究怎样求出某些分形的计盒维数。特别将涉及到从初始集上通过去掉或"剪切"掉不交区域序列而得到的那些分形。$\mathbb{R}$ 的所有紧子集都能用这种方法得到。例如，三分康托集是通过从[0,1] 上除去开区间序列$(\frac{1}{3},\frac{2}{3}),(\frac{1}{9},\frac{2}{9}),(\frac{7}{9},\frac{8}{9}),(\frac{1}{27},\frac{2}{27}),\cdots$ 而得到的。类似的，平面上的 Sierpinski 三角形是通过从初始等边三角形上去掉一系列等边三角形而得到的。下面将稍微详细地处理 $\mathbb{R}$ 的子集，然后简要地讨论高维的类似情况。我们将看到 $\mathbb{R}$ 的子集的盒维数仅仅依赖于余集的区间大小而不是它们的排列。于是，在某种意义上来说，盒维数描述了集合的余集而不是集合本身。

设 $A$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个有界闭区间，$A_1,A_2,\cdots$ 是 $A$ 的满足 $|A|=\sum_{i=1}^{\infty}|A_i|$ 的不交的开子区间序列。(当然 $|A_i|$ 是 $A_i$ 的长度。) 设 $E=A\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，故 $E$ 是一个具有余区间 $A_k$、勒贝格测度(或长度)为零的紧集。当希望强调这种由剪切掉一系列区间而得到的构造时，就称这样的集合为**剪切集**。记 $a_i=|A_i|$ 为 $A_i$ 的长度，并假设这些区间以递减的长度排序，故 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\cdots$，见图 3.5(a)。

在研究下盒和上盒维数(见 2.1 节)的任何等价定义时，通过 $E$ 的 $r$-邻域 $E_r$ 的大小给出的闵可夫斯基定义是较方便的，见式(2.4)－(2.6)。记 $V(r)=\mathcal{L}^1(E_r)$ 为 $E_r$ 的一维勒贝格测度(或长度)。很容易用区间 $A_i$ 的长度来表示 $V(r)$。设 $r\leqslant\frac{1}{2}a_1$，$k$ 是满足 $a_{k+1}\leqslant 2r\leqslant a_k$ 的整数，那么 $E_r$ 由所有满足 $i\geqslant k+1$ 的区间 $A_i$ 和在每个 $A_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 两旁长度为 $r$ 的两个区间，以及在集合 $E$ 的两端的各一个长度为 $r$ 的区间构成，见图 3.5(b)。于是

$$V(r)=2(k+1)r+\sum_{k+1}^{\infty}a_i \quad 其中\ a_{k+1}\leqslant 2r\leqslant a_k \tag{3.17}$$

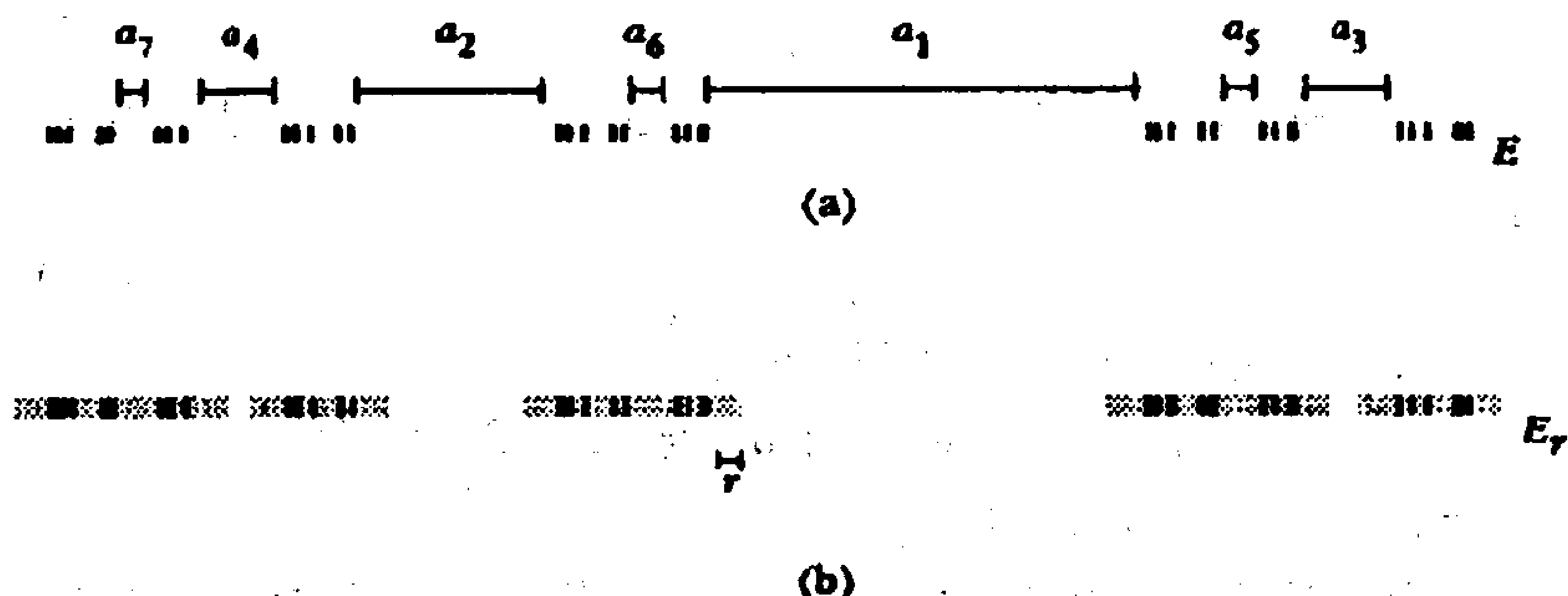



图 3.5 (a) 剪切集 $E$ 的间隙长度 (b) $E$ 的 $r$-邻域 $E_r$

原则上，联合(2.4)－(2.6)的公式使我们能够从已知 $a_k$ 的长度去求出 $E$ 的盒维数。特别地，维数仅仅依赖于这些长度而不依赖于 $A$ 内的相应不交区间 $A_i$ 的排列。下一个命题通过 $a_i$ 的极限状况确定了 $E$ 的盒维数的界。

需要用到下面的不等式。如果 $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ 是收敛于 0 的递减序列，$0<\alpha<1$，那么

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i^{-\alpha}(a_i - a_{i+1}) \leqslant (1-\alpha)^{-1} a_k^{1-\alpha} \tag{3.18}$$

为看清这点，只要注意到左边的式子是 $x^{-\alpha}$ 在区间 $[0,a_k]$ 上积分的下和。

**命题 3.6**

记

$$a = -\liminf_{k\to\infty} \frac{\log a_k}{\log k} \quad 和 \quad b = -\limsup_{k\to\infty} \frac{\log a_k}{\log k}$$

则 $1\leqslant b\leqslant a$，且

$$1/a \leqslant \underline{\dim}_B E \leqslant \overline{\dim}_B E \leqslant 1/b \tag{3.19}$$

**证明** 由于 $ka_k\leqslant|E|$，所以 $1\leqslant b\leqslant a$。由对任意充分大的 $k$，及 $0<c_1,c_2<\infty$，

$$c_1k^{-a} \leqslant a_k \leqslant c_2k^{-b} \tag{3.20}$$

的假设，利用逼近的方法容易导出式(3.19)。事实上如果 $r$ 充分小且

$$a_{k+1} \leqslant 2r \leqslant a_k \tag{3.21}$$

则由式(3.17)、(3.20) 和式(3.21) 得出

$$V(r) \geqslant 2(k+1)r \geqslant 2c_1^{1/a}a_{k+1}^{-1/a}r \geqslant 2c_1^{1/a}2^{-1/a}r^{1-1/a}。$$

再由式(2.4) 即得 $1/a \leqslant \underline{\dim}_B E$。

为证明维数的上界，可在式(3.20) 中设 $b>1$。如果 $r$ 充分小，选取 $k$ 满足式(3.21)，由恒等式(3.17) 并利用式(3.20),(3.21) 及(3.18) 即有

$$\begin{aligned}
V(r) &= 2(k+1)r + \sum_{k+1}^{\infty} a_i \\
&= (k+1)(2r - a_{k+1}) + \sum_{k+1}^{\infty}(i+1)(a_i - a_{i+1}) \\
&\leqslant 4kr + 2\sum_{k+1}^{\infty} i(a_i - a_{i+1}) \\
&\leqslant 4c_2^{1/b}a_k^{-1/b}r + 2c_2^{1/b}\sum_{k+1}^{\infty} a_i^{-1/b}(a_i - a_{i+1}) \\
&\leqslant 4c_2^{1/b}2^{-1/b}r^{1-1/b} + 2c_2^{1/b}(1-1/b)^{-1}a_{k+1}^{1-1/b} \\
&\leqslant c_3 r^{1-1/b}
\end{aligned}$$

对某常数 $c_3$ 成立。由式 (2.5) 得出估计 $\overline{\dim}_B E \leqslant 1/b$。□

当然式(3.19) 对 $b=\infty$ 仍然成立，这里"$1/\infty=0$"。

如果下式中极限存在，从命题 3.6 立即可得 $\dim_B E = -1/\lim(\log a_k/\log k)$，从这个公式可以求出许多集合的盒维数．例如，如果 $E$ 是三分康托集，余区间的长度 $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ 由 $a_k = 3^{-m-1}$ 给出，这里 $m$ 是满足 $2^m \leqslant k \leqslant 2^{m+1}-1$ 的整数．则 $\lim_{k\to\infty}\log a_k/\log k = \lim_{m\to\infty} -(m+1)\log 3/m\log 2 = -\log 3/\log 2$，故 $\dim_B E = \log 2/\log 3$。

同样，对由 $p>0$, $E^{(p)}=\{0,1,2^{-p},3^{-p},4^{-p},\cdots\}$ 定义的“收敛序列集”，有 $a_k=k^{-p}-(k+1)^{-p}\sim pk^{-p-1}$（利用中值定理），故 $\lim_{k\to\infty}\log a_k/\log k=\lim_{k\to\infty}\log pk^{-p-1}/\log k=-(p+1)$，给出 $\dim_B E^{(p)}=1/(p+1)$。

下面的有关命题 3.6 的部分逆命题表明在给定盒维数的条件下，可以推出关于余区间的长度 $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ 的一些结论。

**命题 3.7**

设

$$t=\underline{\dim}_B E \quad 和 \quad s=\overline{\dim}_B E \tag{3.22}$$

这里 $0<t\leqslant s<1$，则

$$-(1-t)/(t(1-s))\leqslant\liminf_{k\to\infty}\frac{\log a_k}{\log k}\leqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{\log a_k}{\log k}\leqslant -1/s \tag{3.23}$$

**证明** 设对充分小的 $r$

$$c_1 r^{1-t}\leqslant V(r)\leqslant c_2 r^{1-s} \tag{3.24}$$

其中 $c_1,c_2$ 是正常数，而 $0<t<s<1$。则由盒维数的闵可夫斯基定义，在上述假设下完全可以推导出式 (3.23)。事实上，利用式 (3.17) 可得

$$c_1 r^{1-t}\leqslant 2(k+1)r+\sum_{k+1}^{\infty}a_i\leqslant c_2 r^{1-s}，\quad 其中\ a_{k+1}\leqslant 2r\leqslant a_k。 \tag{3.25}$$

取 $r=\frac{1}{2}a_k$，由上式右边不等式知 $a_k(k+1)\leqslant c_2 2^{s-1}a_k^{1-s}$，即得式 (3.23) 的右边不等式。

现在，记 $\gamma=(1-s)/(1-t)$，选择 $b\geqslant 1$ 使得

$$c_1 b^{1-t}\geqslant 2c_2 \tag{3.26}$$

取 $r=ba_k^{\gamma}$，且设 $q$ 是满足 $a_{q+1}\leqslant 2r<a_q$（故 $q<k$）的整数。只要 $k$ 充分大，由式 (3.17) 可得

$$V(r)-V\left(\frac{1}{2}a_k\right)=2(q+1)r+\sum_{q+1}^{\infty}a_i-(k+1)a_k-\sum_{k+1}^{\infty}a_i$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(q+1)r-(k+1)a_k+\sum_{q+1}^{k}a_i \\
&= (q+1)(2r-a_{q+1})+\sum_{q+1}^{k-1}(i+1)(a_i-a_{i+1}) \\
&\leqslant k(2r-a_{q+1})+k(a_{q+1}-a_k) \\
&= k(2r-a_k) \\
&\leqslant 2kr
\end{aligned}
$$

因此由式(3.26)和(3.24)知

$$
\begin{aligned}
c_2a_k^{1-s} &\leqslant c_1b^{1-t}a_k^{1-s}-c_2a_k^{1-s} \\
&= c_1r^{1-t}-c_2a_k^{1-s} \\
&\leqslant V(r)-V(a_k) \\
&\leqslant V(r)-V(\frac{1}{2}a_k) \\
&\leqslant 2kba_k^{\gamma}
\end{aligned}
$$

于是 $c_3k^{-1}\leqslant a_k^{\gamma-1+s}=a_k^{t(1-s)/(1-t)}$，即得 $a_k\geqslant c_4k^{-(1-t)/t(1-s)}$，其中 $c_3,c_4$ 不依赖于 $k$，这正是所要求的式(3.23)左边的不等式。□

容易验证当 $s=0$ 或 $s=1$ 时，式(3.23)的右边不等式成立，而如果 $t=s=1$，则 $\lim\log a_k/\log k=-1$。

可以证明在式(3.23)中所表示的界是能够达到的最好的结果。特别，如果将自然数按从小到大的次序分成一系列长度增加得很快的数段，并使属于同一数段的$k$，$a_k$都取相等的值，就能证明下界是最佳可能值。

命题3.6和3.7的一个令人满意的推论是，当$\log a_k/\log k$ 的极限存在时，$E$ 的盒维数明确地存在。

**系 3.8**

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是如上所述的剪切集。那么$\underline{\dim}_B E=\overline{\dim}_B E$ 当且仅

当 $\lim_{k\to\infty}\log a_k/\log k$ 存在，这时

$$\dim_B E = -1/(\lim_{k\to\infty}\log a_k/\log k)$$

**证明** 由命题 3.6，如果 $1\leqslant a=b\leqslant\infty$，则 $1/a\leqslant\underline{\dim}_B E\leqslant\overline{\dim}_B E\leqslant\frac{1}{b}=\frac{1}{a}$。

反过来，如果 $0\leqslant t=s\leqslant 1$，命题 3.7 和它下面的注解给出了 $\lim_{k\to\infty}\log a_k/\log k=-\frac{1}{s}$。□

尽管缺乏一般性的应用，但类似的分析可以将结论推广到高维空间的剪切集上。下面举例说明，这是一个从平面区域上除去圆盘序列构成的集合的例子。

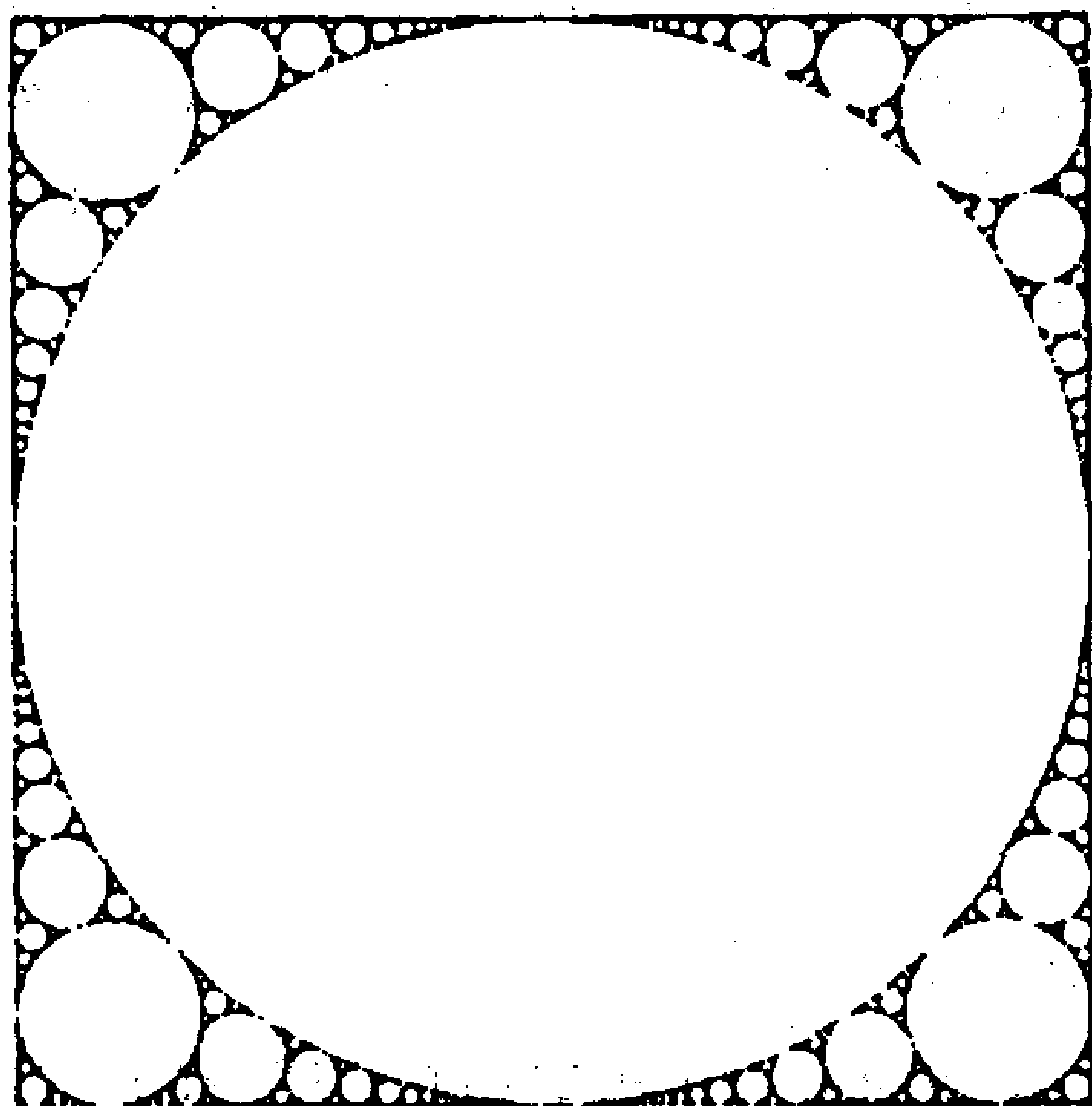


**图 3.6 平面上一个剪切集．这里，在每一步除去尽可能大的圆盘．除去的圆盘族称为正方形的 Apollonian 填充，剩下的剪切集称为剩余集，它的豪斯道夫和盒维数大约为 1.31**

为方便起见，设 $A$ 是周长为 $p$ 的平面紧凸区域，$A_1, A_2\cdots$ 为包含在 $A$ 中且全部面积与 $A$ 的面积相等的不交开圆盘序列。设 $E=A\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，故 $E$ 是具有蜂窝状外观的面积为零的集合，见图

3.6。设 $r_i$ 是 $A_i$ 的半径，且设 $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3 \geqslant \cdots$。

与直线上子集的情况一样，可以求出 $E$ 的 $r$-邻域 $E_r$ 的面积 $V(r)$。如果 $r_{k+1} \leqslant r \leqslant r_k$，则 $E_r \backslash E$ 由以下三部分点组成：其一是 $A$ 外的与 $A$ 之距离在 $r$ 之内的点集；其二是对所有 $1 \leqslant i \leqslant k$，在每个 $A_i$ 内的内、外半径分别为 $r_i - r$ 和 $r_i$ 的圆环；还有就是对所有的 $i \geqslant k+1$ 的圆盘 $A_i$。于是

$$V(r) = (pr + \pi r^2) + \sum_{i=1}^{k} \pi(r_i^2 - (r_i - r)^2) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \pi r_i^2$$

$$= pr + 2\pi r \sum_{i=1}^{k} r_i + \pi \sum_{i=k+1}^{\infty} r_i^2 + \pi r^2(1-k)$$

像一维情形一样，建立起 $V(r)$ 与 $r_i$ 的关系，进而建立 $\dim_B E$ 与 $r_i$ 的关系是可能的。例如，设 $r_k \asymp k^{-a}$，这里 $1/2 < a < 1$，(回顾一下，$a_k \asymp b_k$ 意味着对某 $c_1, c_2 \geqslant 0$，$c_1 \leqslant a_k/b_k \leqslant c_2$，对任意 $k$ 成立。) 那么对 $r_{k+1} \leqslant r \leqslant r_k$，

$$\begin{aligned} V(r) &\asymp r + r \sum_{1}^{k} i^{-a} + \sum_{k+1}^{\infty} i^{-2a} - r^2 k \\ &\asymp rk^{1-a} + k^{1-2a} \\ &\asymp r r_k^{(a-1)/a} + r_k^{(2a-1)/a} \\ &\asymp r^{2-1/a}. \end{aligned}$$

由式(2.6)即得 $\dim_B E = \dfrac{1}{a}$。

显然可以用类似的方法求出剪切其它图形的一些区域而得的集合的盒维数。

## 3.3 注记与参考文献

基本的“隐含定理”是 McLaughlin (1987) 给出的，进一步的结果和应用在 Falconer(1989) 的文章中。有向图集合的更多细节参见 Bedford (1986)，Mauldin 和 Williams (1988) 和 Edgar

(1990)，半自相似集见 Bandt(1989) 和 Falconer (1995a)。Perron-Frobenius 定理在 Bellman (1960) 中论及。Besicovitch 和 Taylor (1954) 研究了补区间的长度和 $\mathbb{R}$ 的子集维数之间的关系。类似于命题 3.6和 3.7 的盒维数结果可以在 Lapidus 和 Pommerance (1993) 和 Falconer(1995b) 中找到。

## 练　习

3.1 举例说明如果没有 $E$ 是紧集的条件，则定理 3.1 和 3.2 的结论不对。

3.2 证明定理 3.2 的假定蕴涵着 $\mathcal{P}^s(E) \leqslant \mathcal{P}^s_0(E) < \infty$，这里 $\mathcal{P}^s$ 和 $\mathcal{P}^s_0$是填充测度和先测度，见 2.1 节。(用假设 $\mathcal{P}^s_r(E) > a^{-s}$ 代替式(3.5) 来修改定理 3.2 的证明，得到对 $t > s$，满足 $\sum|B_i|^t > a^{-t}$ 的不交球 $B_1,\cdots,B_m$。然后取 $g_i: E \to E \cap B_i$ 使 $a|B_i||x-y| \leqslant |g_i(x)-g_i(y)|$，以及用类似的方法推出 $\dim_H E > s$。)

3.3 证明用"假设有一个数 $q$，对每个与 $E$ 相交且 $|U| < r_0$ 的集合 $U$，都存在集合 $U_i$，$i=1,\cdots,q$，满足 $U \subset \bigcup_{i=1}^{q} U_i$，以及映射 $g_i: E \cap U_i \to E$ 满足 $a|U|^{-1}|x-y| \leqslant |g_i(x)-g_i(y)|$"代替定理 3.1 中的第二句话，定理 3.1 仍然成立。

3.4 利用练习 3.3 证明如果仅仅要求 $E$ 满足开集条件(2.40)，系 3.3 的最后一个结论成立。

3.5 设 $E$ 是三分康托集的子集，它由[0,1] 中那些以 3 为底仅包含数字 0 和 2 且没有相邻 2 出现的展开式所表示的数组成。设 $E_1 = E \cap [0, \frac{1}{3}]$，$E_2 = E \cap [\frac{2}{3}, 1]$。证明 $E_1$、$E_2$ 可以表述为一个有向图集系统，并证明 $\dim_H E_1 = \dim_H E_2 = \log((1+\sqrt{5})/2)/\log 3$。

3.6 证明存在唯一一族非空紧集 $E_i$ 满足式(3.12)。(提示：在含有 $q$ 个部分的有向图集的集合上定义一个度量，使每两个含有 $q$ 个部分的有向图集之间的距离等于相应的集合对之间的豪斯

道夫距离的最大值：模仿定理 2.6 的证明。)

3.7 在具有相应的矩阵 $A^{(s)}$ 的两个有向图集族情况下，证明最大特征值由下式给出

$$\rho(A^{(s)})=\frac{1}{2}(A_{1,1}^{(s)}+A_{2,2}^{(s)})+\frac{1}{2}((A_{1,1}^{(s)}-A_{2,2}^{(s)})^2+4A_{1,2}^{(s)}A_{2,1}^{(s)})^{1/2}$$

通过检查递减的每项 $A_{i,j}^{(s)}$ 对 $\rho(A^{(s)})$ 的作用，证明 $\rho(A^{(s)})$ 是关于 $s$ 严格递减的。

3.8 设 $E$ 是[0,1]的(紧)子集，它由那些十进制仅包含数字 0,2,4,6,8 的展开式所表示的数组成。从定理 3.1(或定理 3.2)推出 $\dim_H E=\dim_B E$。从命题 3.6 推出 $\dim_B E=\log 5/\log 10$。

3.9 $V(r)$ 是高度为 1 的 Sierpinski 三角形的 $r$-邻域的面积，证明 $V(r)\asymp 3^k 2^{-2k}$，这里 $2^{-k}<r\leqslant 2^{-k-1}$，由此推证出 Sierpinski 三角形的盒维数等于 $\log 3/\log 2$。

3.10 设 $E$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个紧子集，$E'$ 是由 $E$ 加上 $E$ 的每个补区间中的一个单点而得的集合，证明 $\dim_B E'=\dim_B E$。(设 $\dim_B E$ 存在)。

# 第4章　Cookie-cutter 和有界畸变

在本章中引进了 cookie-cutter 集，它可以看成是一种"非线性的康托集"。这将使我们可以在第5章中利用 cookie-cutter 去说明自相似集的理论是怎样推广到非线性的类似集类上的。利用 cookie-cutter，可以在相对简单的条件下描述一些非常一般理论的基本思想。

## 4.1　Cookie-cutter 集

我们研究称为 cookie-cutter 的动力系统的一个简单形式。cookie-cutter 具有的分形斥子称为 cookie-cutter 集，它可以被认为是相应的迭代函数系的吸引子。虽然将有关的理论推广到多个映射的情形需要一些变化，但为简单起见，在这里还是建立只有两个映射的 IFS。尽管完全可以将这些理论推广到 $\mathbb{R}^n$ 的子集上，但这里只对 $\mathbb{R}$ 的子集 $X$ 进行研究。

设 $X$ 是有界非空闭区间，$X_1$ 和 $X_2$ 是 $X$ 的不交子区间。设 $f:X_1\cup X_2\to X$ 是将 $X_1$ 和 $X_2$ 都双射地映到 $X$ 上的映射（见图4.1)。假设 $f$ 有连续导数（稍后将需要更强的可微性条件）而且是扩张的，即对任意 $x\in X_1\cup X_2$，$|f'(x)|>1$。(通常 $f$ 是一个定义在更大范围，也许甚至是定义在整个 $\mathbb{R}$ 上的函数在 $X$ 上的限制，例如，$f$ 可能是如图4.2中的一个单峰函数在 $X$ 上的限制。)

下面研究由 $f$ 的迭代点给出的动力系统。令人特别感兴趣的是集合

$$E=\{x\in X：对所有\ k=0,1,2,\cdots,f^k(x)\ 有定义，且在\ X_1\cup X_2\ 中\}\tag{4.1}$$

这里 $f^k$ 是 $f$ 的第 $k$ 次迭代。那么 $E$ 是在 $f$ 的迭代下保留在

$X_1 \cup X_2$ 中的点的集合。由于 $E=\bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(X)$，是由递减的紧集序列生成的，故集合 $E$ 是紧的，并且是非空的。

显然，$E$ 在 $f$ 下是不变的，这是因为 $x \in E$ 当且仅当 $f(x) \in E$，即

$$f(E)=E=f^{-1}(E) \tag{4.2}$$

进一步，在下面的意义下 $E$ 是一个斥子，即不在 $E$ 中的点（然而它们也许很接近 $E$）最终在 $f$ 的迭代下映射到 $X_1 \cup X_2$ 的外面。事实上，如图 4.2 的例子中，对所有 $x \notin E$，$f^k(x) \to -\infty$，见 FG，13.1 节。

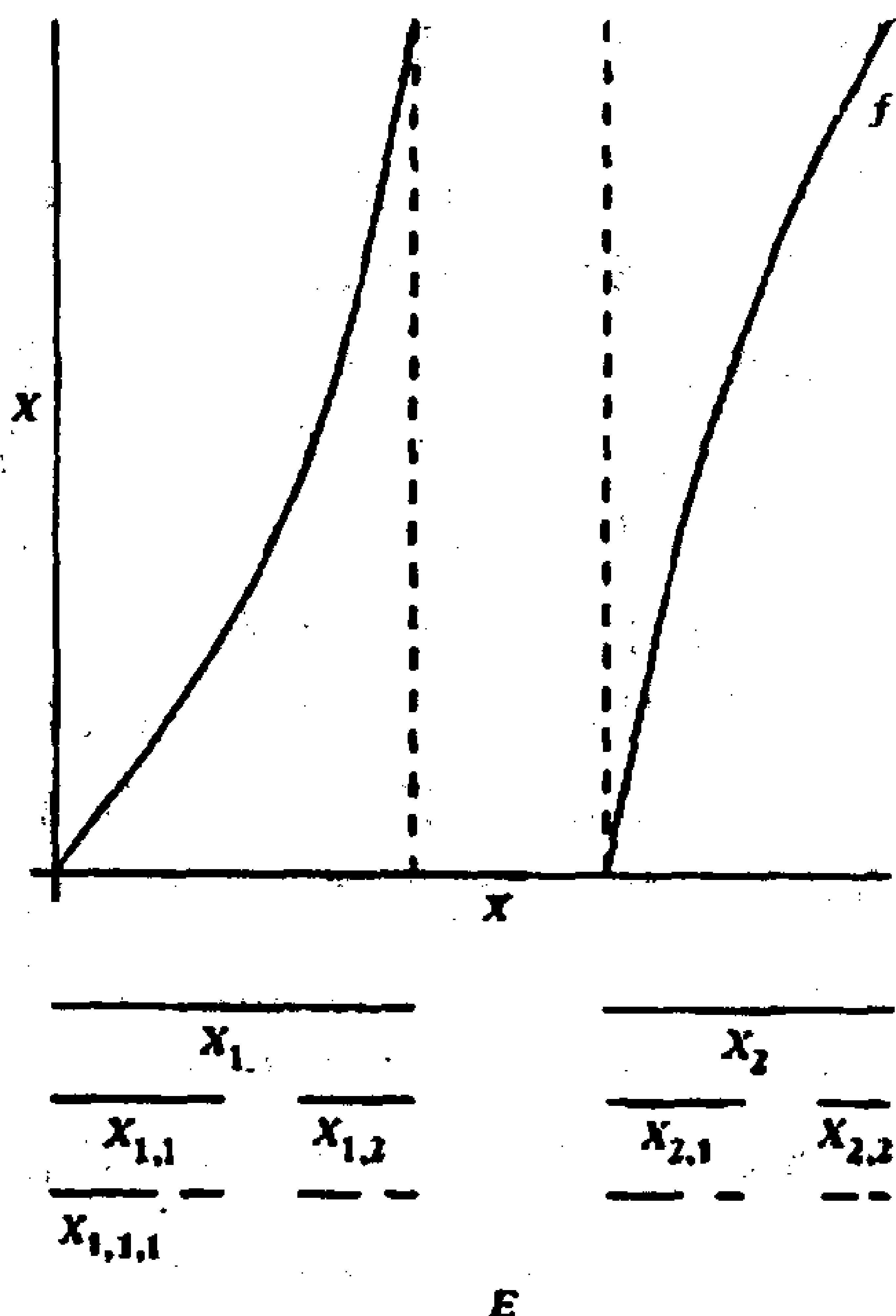



图 4.1 以 cookie-cutter 集 $E=\bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(x)$ 为斥子的 cookie-cutter 函数 $f: X_1 \cup X_2 \to X$

考察这种情形的等价的方法是把这个函数作为迭代函数系的

"逆"。定义 $F_1,F_2:X\to X$ 是 $f$ 的反函数的两个分支，于是

$$F_1(x)=f^{-1}(x)\cap X_1$$
$$F_2(x)=f^{-1}(x)\cap X_2$$

故 $F_1$ 和 $F_2$ 分别将 $X$ 双射到 $X_1$ 和 $X_2$ 上。于是

$$f(x)=\begin{cases} F_1^{-1}(x) & (x\in X_1) \\ F_2^{-1}(x) & (x\in X_2) \end{cases} \tag{4.3}$$

由于 $f$ 是一个在紧集 $X_1\cup X_2$ 上满足 $|f'(x)|>1$ 的连续可导函数，故存在数 $0<c_{\min}\leqslant c_{\max}<1$，对任意 $x\in X_1\cup X_2$，满足 $1<c_{\max}^{-1}\leqslant|f'(x)|\leqslant c_{\min}^{-1}<\infty$。由此推出反函数 $F_1$，$F_2$ 是可微的，且对 $x\in X$，$c_{\min}\leqslant|F_1'(x)|$，$|F_2'(x)|\leqslant c_{\max}$，由中值定理，对 $i=1,2$

$$c_{\min}|x-y|\leqslant|F_i(x)-F_i(y)|\leqslant c_{\max}|x-y|\quad(x,y\in X) \tag{4.4}$$

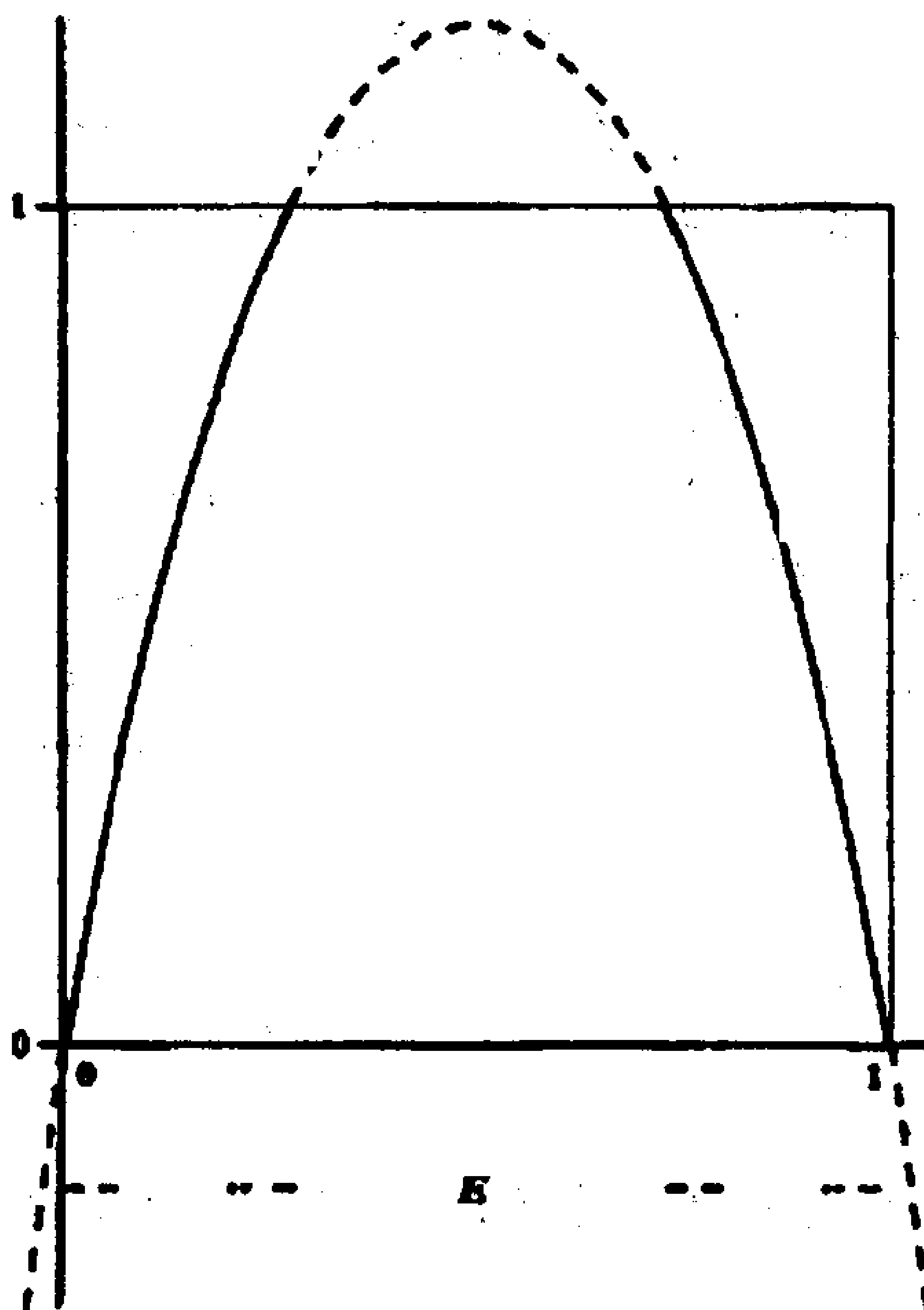



图 4.2 单峰函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 产生的 cookie-cutter 系统。在中 cookie-cutter 集 $E=\bigcap_{k=0}^{\infty}f^{-k}[0,1]$ 是 $f$ 的斥子 $x\notin E$，$\lim_{k\to\infty}f^k(x)=-\infty$

由式(4.1)，$f$ 的斥子 $E$ 满足

$$E=F_1(E)\cup F_2(E) \tag{4.5}$$

由于 $F_1$ 和 $F_2$ 是 $X$ 上的压缩映射，利用定理 2.5 中的 IFS 的基本性质，有唯一的非空紧集 $E$ 使等式(4.5)成立。于是 $f$ 的斥子 $E$ 是 IFS$\{F_1,F_2\}$ 的吸引子。

与 2.2 节一样，这里仍用由 1 和 2 组成的序列 $I_k=\{(i_1,\cdots,i_k):i_j=1$ 或 $2\}$ 来标记与 IFS 相关联的区间，并记 $I=\bigcup_{k=0}^{\infty}I_k$。特别，对每个 $\boldsymbol{i}=(i_1,\cdots,i_k)$，记 $X_{\boldsymbol{i}}=X_{i_1,\cdots,i_k}=F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(X)$。这样，$f^k:X_{\boldsymbol{i}}\to X$ 在闭区间之间是一个具有逆 $F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}$ 的双射，更一般地，$f^k:X_{i_1,\cdots,i_m}\to X_{i_{k+1},\cdots,i_m}$ 对每个 $k\leqslant m$ 是一个双射。由于 $X_1\cup X_2$ 是不交并，且 $X_1\cup X_2\subset X$，故对任意 $\boldsymbol{i}$，$X_{\boldsymbol{i},1}\cup X_{\boldsymbol{i},2}$ 也是不交并，且 $X_{\boldsymbol{i},1}\cup X_{\boldsymbol{i},2}\subset X_{\boldsymbol{i}}$。于是 $E_k\equiv\bigcup_{\boldsymbol{i}\in I_k}X_{\boldsymbol{i}}$ 包含 $2^k$ 个不交的闭区间，且 $(E_k)_{k=0}^{\infty}$ 是一个递减的紧集序列。如同式(2.28)一样，$E=\bigcap_{k=0}^{\infty}E_k$，且 $E$ 是完全不连通的，并与一个康托集拓扑等价。

注意到利用式(4.4)，对每一个 $\boldsymbol{i}\in I$ 和 $i=1,2$

$$c_{\min}|X_{\boldsymbol{i}}|\leqslant|X_{\boldsymbol{i},i}|\leqslant c_{\max}|X_{\boldsymbol{i}}| \tag{4.6}$$

在最简单的情形，由相似变换族(2.24)构成的 IFS 对应于由 $f(x)=3x(\mathrm{mod}\ 1)$ 给出的映射 $f:[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]\to[0,1]$。于是斥子 $E$ 是三分康托集，且集合 $E_k$ 是由 $2^k$ 个长度为 $3^{-k}$ 的区间组成。然而令人更感兴趣的是 $F_1$ 和 $F_2$ 不是相似变换的情形。例如，$F_1,F_2:[0,1]\to[0,1]$，其中

$$F_1(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{10}x^2,\quad F_2(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}-\frac{1}{10}x^2 \tag{4.7}$$

给出的不变集 $E$，它是三分康托集的“非线性扰动”。这相当于 $E$ 是非线性函数 $f$ 的斥子，这个函数由式(4.3)通过 $F_1$ 和 $F_2$ 定义在[0,1]的一对子区间上。

这种形式的动力系统 $f:X_1\cup X_2\to X$，或者 $X$ 上的等价 IFS$\{F_1,F_2\}$，称为 cookie-cutter系统，集合 $E$ 称为cookie-cutter集。

映射 $F_1$ 和 $F_2$ 通常不是相似变换，$E$ 是"畸变"了的康托集，但仍然是"近似自相似"的。

## 4.2 cookie-cutter 的有界畸变

有界畸变原理使集合的"近似自相似性"的思想精确化，这个原理叙述的是任何充分小的邻域都可以被一个不过分畸变的变换映射成集合的较大的部分。

首先证明定义在 cookie-cutter 集 $E$ 上的一般函数 $\phi$ 的"有界变差原理"，然后用与 $E$ 的几何性质相关的方法选择 $\phi$ 而得到有界畸变的结果。设 $f:X_1 \cup X_2 \to X$ 是如 4.1 节所述的，具有相应 IFS$\{F_1,F_2\}$ 和斥子 $E$ 的 cookie-cutter 系统。设 $\phi:X_1 \cup X_2 \to \mathbb{R}$ 是一个李卜希兹函数，对某个 $a>0$，满足

$$|\phi(x)-\phi(y)| \leqslant a|x-y| \quad (x,y \in X_1 \cup X_2) \tag{4.8}$$

（事实上，在理论上仅仅需要 $\phi: E \to \mathbb{R}$，但实际上 $\phi$ 常常是自然地定义在一个比 $E$ 大的集合上）。

令人感兴趣的是在 $f$ 的逐次迭代下，迭代点的 $\phi$ 值，特别将对 $k=1,2,\cdots$ 估计和式

$$S_k\phi(x) \equiv \phi(x)+\phi(fx)+\phi(f^2x)+\cdots+\phi(f^{k-1}x) = \sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^jx) \tag{4.9}$$

这里 $f^jx$ 是在 $f$ 下的 $x$ 的第 $j$ 次迭代。（为了避免过分繁琐的记号，在文中常用 $f^jx$ 替代 $f^j(x)$。）注意到只要对某些 $i \in I_k$，$x \in X_i$，$S_k\phi(x)$ 就有定义。如果对 $w \in X$，$x=F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}w$，则有下面的可供选择的形式

$$S_k\phi(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}w)=\sum_{j=1}^{k}\phi(F_{i_j}\circ\cdots\circ F_{i_k}w) \tag{4.10}$$

可以把 $\frac{1}{k}S_k\phi(x)$ 看成是 $\phi$ 在 $x$ 处和它的最初 $k-1$ 次迭代的平均。

有界变差原理是关于 $\phi$ 的李卜希兹条件的推论。这个原理断

言和式 $S_k\phi(x)$ 在 $x$ 处对 $k$ 一致的意义下不会有太大的变化。

**命题 4.1** （有界变差原理）

设 $\phi:X\to\mathbb{R}$ 是李卜希兹函数

(a) 存在数 $b$ 使对任意 $k=1,2,\cdots$ 和任意的 $(i_1,\cdots,i_k)\in I_k$，当 $x,y\in X_{i_1,\cdots,i_k}$ 时：

$$|S_k\phi(x)-S_k\phi(y)|\leqslant b \tag{4.11}$$

(b) 更一般地，对任意 $q\geqslant k$ 和任意 $(i_1,\cdots,i_q)\in I_q$，只要 $x,y\in X_{i_1,\cdots,i_q}$，则

$$|S_k\phi(x)-S_k\phi(y)|\leqslant b|X|^{-1}|X_{i_{k+1},\cdots,i_q}| \tag{4.12}$$

**证明** 反复应用式(4.4)，对任意 $(i_1,\cdots,i_k)\in I_k$ $|X_{i_1,\cdots,i_k}|=|F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(X)|\leqslant c_{\max}^k|X|$。如果 $x,y\in X_{i_1,\cdots,i_k}$，则对 $j=0,1,\cdots,k-1$，$f^jx,f^jy\in X_{i_{j+1},\cdots,i_k}$，由式(4.8)

$$\begin{aligned}|\phi(f^jx)-\phi(f^jy)|&\leqslant a|f^jx-f^jy|\\&\leqslant a|X_{i_{j+1},\cdots,i_k}|\\&\leqslant ac_{\max}^{k-j}|X|。\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}|S_k\phi(x)-S_k\phi(y)|&=\left|\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^jx)-\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^jy)\right|\\&\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}|\phi(f^jx)-\phi(f^jy)|\\&\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}ac_{\max}^{k-j}|X|\\&\leqslant ac_{\max}|X|/(1-c_{\max})\end{aligned}$$

令 $b=ac_{\max}|X|/(1-c_{\max})$，即得式(4.11)。

(b) 的证明与上面的证明非常类似，只要注意到，如果 $x,y\in X_{i_1,\cdots,i_q}$，则 $f^jx,f^jy\in X_{i_{j+1},\cdots,i_q}$，故

$$|\phi(f^jx)-\phi(f^jy)|\leqslant ac_{\max}^{k-j}|X_{i_{k+1},\cdots,i_q}|。\square$$

有时为方便起见，将式(4.11)写成下面形式

$$e^{-b} \leqslant \frac{\exp S_k \phi(x)}{\exp S_k \phi(y)} \leqslant e^{b} \tag{4.13}$$

现在设 $f: X_1 \cup X_2 \to X$ 是可微函数族 $C^2$，即具有连续二阶导数的二次可微函数（在区间的端点可微是单侧意义的）。等价地，$F_1$ 和 $F_2$ 是 $X$ 上的 $C^2$ 族。对 $x \in X_1 \cup X_2$，选取

$$\phi(x) = -\log|f'(x)| \tag{4.14}$$

由于 $0 < |f'(x)|$，故函数 $\phi$ 在 $X_1 \cup X_2$ 上具有有界连续的一阶导数。由中值定理，$\phi$ 同时在 $X_1$ 和 $X_2$ 以及 $X_1 \cup X_2$ 上满足李卜希兹条件。

和式 $S_k\phi$ 恰好是需要估计的 $X_i$ 的大小，对 $f^k$ 应用复合函数导数的链条法则，可以得到

$$(f^k)'(x) = f'(f^{k-1}x) \times f'(f^{k-2}x) \times \cdots \times f'(x) \tag{4.15}$$

这里一撇"′"表示求导。取对数，由式(4.14)及式(4.9)，可得

$$-\log|(f^k)'(x)| = \sum_{j=0}^{k-1} -\log|f'(f^j x)| \tag{4.16}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j x)$$

$$= S_k \phi(x) \tag{4.17}$$

（只要对 $j = 0, 1, \cdots, k-1$，$f^j x \in X_1 \cup X_2$，也即 $x \in \bigcup_{\iota \in I_k} X_\iota$，则上述等式成立。）于是，通过 $f$ 的迭代的导数，和式 $S_k\phi$ 有了清楚的解释。

映射 $f^k: X_{i_1, \cdots, i_k} \to X$ 是双射，进一步，它还是个双李卜希兹映射，而具有的映射常数与 $|X_{i_1,\cdots,i_k}|^{-1}$ 没有太大区别。特别对任意 $x \in X_{i_1\cdots,i_k}$，$|X_{i_1,\cdots,i_k}| \asymp |X| |(f^k)'(x)|^{-1}$，见图 4.3。由于在下面的命题中按式(4.14)的形式取 $\phi$，并应用了有界变差原理，将使这一点显得更明确。

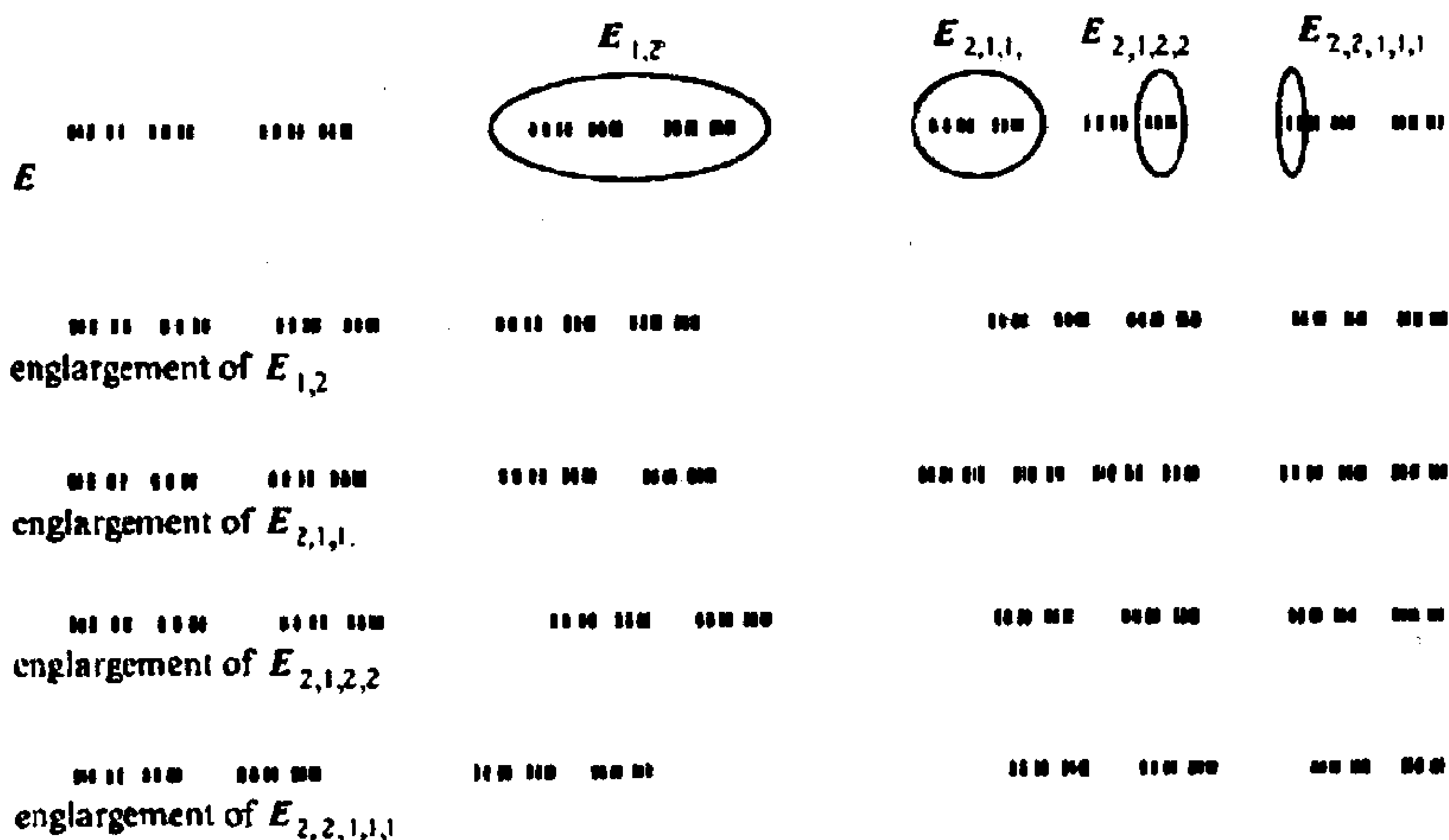



图 4.3 对 cookie-cutter 集 $E$ 的有界畸变原理. 图中显示了一些 $E_{i_1,\cdots,i_k}$ 的组成部分的相似样本，它看起来就象是 $E$ 的"畸变"版本. 对所有的 $k$ 及 $(i_1,\cdots,i_k)$ 畸变的"数量"是有界的

## 命题 4.2 （有界畸变原理）

对任意 $k=0,1,2,\cdots$, 及任意 $(i_1,\cdots,i_k)\in I_k$, 存在数 $b_0$ 和 $b_1$, 使对任意 $x\in X_{i_1,\cdots,i_k}$,

$$b_0^{-1}\leqslant|X_{i_1,\cdots,i_k}||(f^k)'(x)|\leqslant b_0 \tag{4.18}$$

进一步, $f^k:X_{i_1,\cdots,i_k}\to X$ 对任意 $y,z\in X_{i_1,\cdots,i_k}$ 满足：

$$b_1^{-1}|y-z|\leqslant|f^k(y)-f^k(z)||X_{i_1,\cdots,i_k}|\leqslant b_1|y-z| \tag{4.19}$$

**证明** 因为 $X_{i_1,\cdots,i_k}=F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(X)$, 故 $f^k:X_{i_1,\cdots,i_k}\to X$ 是可微的双射。对 $f^k$ 应用中值定理即知对 $y,z\in X_{i_1,\cdots,i_k}$, 存在 $w\in X_{i_1,\cdots,i_k}$, 使

$$f^k(y)-f^k(z)=(y-z)(f^k)'(w) \tag{4.2}$$

选取 $y$ 和 $z$ 为 $X_{i_1,\cdots,i_k}$ 的端点，那么 $f^k(y)$, $f^k(z)$ 是 $X$ 的端点，故对某个 $w\in X_{i_1,\cdots,i_k}$,

$$|X|=|X_{i_1,\cdots,i_k}||(f^k)'(w)| \tag{4.21}$$

利用式(4.13)形式的有界变差原理，并结合式(4.17)可以看出对任意 $x,w \in X_{i_1,\cdots,i_k}$，

$$e^{-b} \leqslant \frac{|(f^k)'(x)|}{|(f^k)'(w)|} \leqslant e^b \tag{4.22}$$

联合上式与式(4.21)，可得式(4.18)，并且由式(4.20)得出式(4.19)这里 $b_0$ 和 $b_1$ 仅仅依赖于 $|X|$ 和 $b$。□

在式(4.19)中，有界畸变原理说明了 $f^k$ 可以由相似变换一致地逼近。

有时将式(4.18)写成下面的一种替代形式是有用的。对任意 $x \in X$，

$$b_0^{-1} \leqslant \frac{|X_{i_1,\cdots,i_k}|}{|(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k})'(x)|} \leqslant b_0$$

注意到当 $F_1, F_2$ 是具有相似比 $c_1, c_2$ 的相似变换的特殊情况，此时 $f'(x)$ 在 $X_{i_1,\cdots,i_k}$ 上是常数，于是上述的论证推导出 $|X_{i_1,\cdots,i_k}| = c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k}|X|$，正如对自相似集所期望的一样。

命题 4.2 的关键之处是 $b_0$ 和 $b_1$ 不依赖于 $k$。虽然平均值估计是应用于函数的 $k$ 次复合上，但是 $f^j(x)$ 及 $f'(f^j(x))$ 不像 $x$ 那样在 $X_{i_1,\cdots,i_k}$ 上变化那么大，除非当 $j$ 非常接近 $k$。这里正是利用式(4.15)控制了$(f^k)'(x)$ 在 $X_{i_1,\cdots,i_k}$ 上的变化。

有界畸变原理的一个有用的推论是，对每一个 $\boldsymbol{i}$，集合 $X_{\boldsymbol{i},1}$和 $X_{\boldsymbol{i},2}$ 在 $X_{\boldsymbol{i}}$内是非常合理地分隔开的，而且 $X_{\boldsymbol{i}}$以一致的方式与球(区间)是可比较的。

**系 4.3**

设 $E$ 是一个 cookie-cutter 集，$d=\mathrm{dist}(X_1,X_2)$，则

(a) 对任意 $\boldsymbol{i} \in I$

$$d b_1^{-1}|X_{\boldsymbol{i}}| \leqslant \mathrm{dist}(X_{\boldsymbol{i},1},X_{\boldsymbol{i},2}) \leqslant |X_{\boldsymbol{i}}| \tag{4.23}$$

(b) 设 $\lambda = db_1^{-1}c_{\min}$。对任意 $\boldsymbol{i}$，如果 $x\in X_{\boldsymbol{i}}\cap E$ 和 $|X_{\boldsymbol{i}}|\leqslant r<|X_{\boldsymbol{i}}|c_{\min}^{-1}$，则

$$B(x,\lambda r)\cap E\subset X_{\boldsymbol{i}}\cap E\subset B(x,r) \tag{4.24}$$

**证明**　映射 $f^k: X_{\boldsymbol{i}}\to X$ 是满足式(4.19)的可微双射。取 $y\in X_{\boldsymbol{i},1}$ 和 $z\in X_{\boldsymbol{i},2}$，使得 $f^k(y)\in X_1$ 和 $f^k(z)\in X_2$，且满足 $\mathrm{dist}(f^k(y),f^k(z))=d$，由式(4.19)的右边不等式即可推出式(4.23)的左边的不等式。由于 $X_{\boldsymbol{i}}\subset X_{\boldsymbol{i},1}\cup X_{\boldsymbol{i},2}$，所以式(4.23)右边的不等式是显然的。

对(b)注意到如果 $\boldsymbol{i}\in I_k$ 和 $\lambda r<db_1^{-1}|X_{\boldsymbol{i}}|$，则由(a)知 $B(x,\lambda r)$ 对任意 $\boldsymbol{j}\in I_k$，$\boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{i}$，是与 $X_{\boldsymbol{j}}$ 不交的。于是式(4.24)左边的包含关系成立，右边的包含关系也立即可得。□

现在推证"在没有太多的畸变"的条件下 $E$ 的小部分可以映射成较大的部分。更确切地说，存在双-李卜希兹映射，把中心位于 $E$ 内的每个球映射到 $E$ 的较大的部分上，其李卜希兹常数与球的大小是可比较的。满足系 4.4 结论的集合有时称为近似自相似的或拟自相似的。

**系 4.4**

设 $E$ 是一个 cookie-cutter 集，则存在数 $c>0$ 及 $r_0>0$，使得对每一个中心在 $E$ 中，半径 $r<r_0$ 的球 $B$，存在映射 $g: E\cap B\to E$，满足

$$c^{-1}r^{-1}|x-y|\leqslant|g(x)-g(y)|\leqslant cr^{-1}|x-y|\quad (x,y\in E\cap B) \tag{4.25}$$

**证明**　设 $r<r_0\equiv db_1^{-1}|X|$ 及 $x\in E$，那么由式(4.6)可以找到 $k$ 和 $\boldsymbol{i}=(i_1,\cdots,i_k)\in I_k$，使得 $x\in X_{\boldsymbol{i}}$ 和 $c_{\min}db_1^{-1}|X_{\boldsymbol{i}}|\leqslant r<db_1^{-1}|X_{\boldsymbol{i}}|$。由系 4.3(b)，$E\cap B(x,r)\subset X_{\boldsymbol{i}}$，利用式(4.19)即得 $f^k: E\cap B(x,r)\to E$ 满足

$$b_1^{-1}|X_{\boldsymbol{i}}|^{-1}|y-z|\leqslant|f^k(y)-f^k(z)|\leqslant b_1|X_{\boldsymbol{i}}|^{-1}|y-z|$$

故

$$c_{\min} d b_1^{-2} r^{-1}|y-z| \leqslant |f^k(y)-f^k(z)| \leqslant d r^{-1}|y-z|$$

取 $g=f^k$, 即得式(4.25)。□

cookie-cutter 集 $E$ 同时也是"相对"意义下的近似自相似集，这其中整个 $E$ 可能映射成 $E$ 的较小邻域而没有发生太多的畸变。

**系 4.5**

设 $E$ 是 cookie-cutter 集，则存在 $c>0$ 和 $r_0>0$, 使得对每个中心在 $E$ 中且半径 $r<r_0$ 的球 $B$, 存在映射 $g: E \to E \cap B$, 满足

$$c^{-1} r|x-y| \leqslant |g(x)-g(y)| \leqslant c r|x-y| \quad (x,y \in E) \tag{4.26}$$

**证明** 设 $x \in E$ 和 $r<r_0=|X|$, 可以找到 $\boldsymbol{i}=(i_1,\cdots,i_k)$, 使得 $x \in X_{\boldsymbol{i}}$ 和 $c_{\min} r<|X_{\boldsymbol{i}}| \leqslant r$, 故 $X_{\boldsymbol{i}} \subset B(x,r)$。把式(4.19)应用到 $y=F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(x)$ 和 $z=F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(w) \in X_i$ 上，则有

$$b_1^{-1}|X_{\boldsymbol{i}}||x-w| \leqslant |F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(x)-F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(w)| \leqslant b_1|X_{\boldsymbol{i}}||x-w|$$

故

$$c_{\min} b_1^{-1} r|x-w| \leqslant |F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(x)-F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(w)| \leqslant b_1 r|x-w|$$

取 $g$ 为 $F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}$ 在 $E$ 上的限制，上式即是式(4.26)。□

这些有关近似相似性的结论使得我们可以把 3.1 节的隐含定理应用到 cookie-cutter 集上。

**系 4.6**

设 $E$ 是 cookie-cutter 集，满足 $\dim_H E=s$。则 $\underline{\dim}_B E=\overline{\dim}_B E=\dim_P E=s$, 且 $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$。

**证明** 由系 4.4 和定理 3.1 知，这些维数是相等的且 $0<\mathcal{H}^s(E)$, 而由系 4.5 和定理 3.2 即得 $\mathcal{H}^s(E)<\infty$。□

从第5章的更深刻的探讨中，将可以得到这些维数的性质，同时还得出有关维数自身的公式。

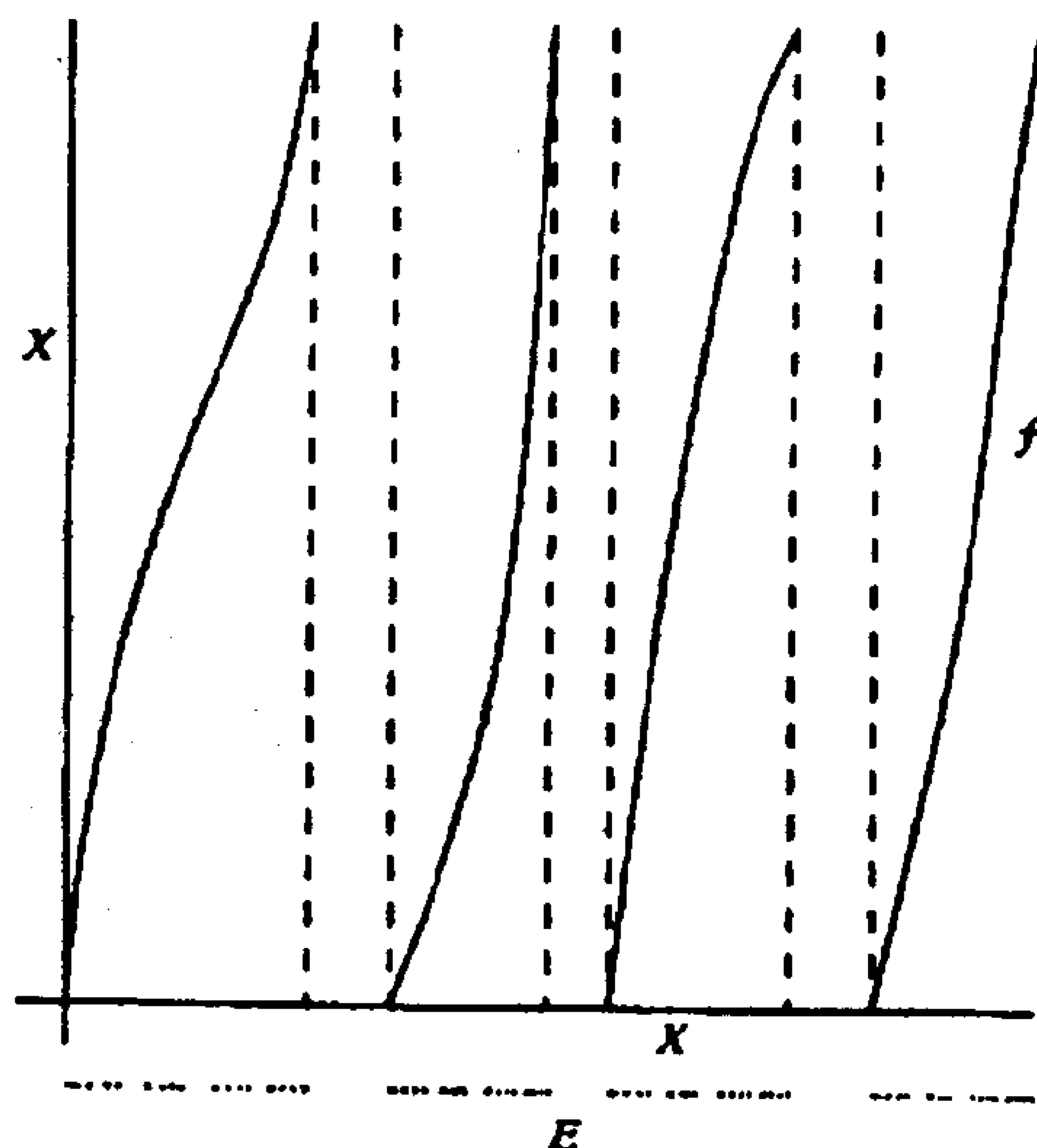



图4.4 一个具有斥子 $E=\bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(X)$ 的"四部分"cookie-cutter 函数 $f$

就象例3.4一样，同样也能获得满足 $f(A)\subset A$ 或 $f(A)\supset A$ 的 cookie-cutter 集的子集 $A$ 的信息，见练习4.3。

注意到本章(以及下章)的理论可以应用到许多其它的情形中，这在5.5节有概略的叙述。特别，对 $m$-部分的 cookie-cutter 函数 $f: X_1\cup\cdots\cup X_m\rightarrow X$ 的讨论仅需要少许的修改，其中 $f: X_i\rightarrow X$ 是扩张的双射，$i=1,2,\cdots,m$，见图4.4。

## 4.3 注记与参考文献

有界畸变原理来自许多不同的文章。例如可以参看 Bedford (1986) 等人的文章，以及在5.7节中列出的与热力学形式体系相关联的其它参考文献。

## 练习

4.1 找出由式(4.7)给出的与 $F_1, F_2$ 对应的函数 $f$。

4.2 直接证明三分康托集是近似的自相似集，找出此情形中用于式(4.25)最小数 $c$。

4.3 设 $A$ 是 cookie-cutter 集 $E$ 的一个非空紧子集，且 $s=\dim_H A$。利用式(4.25)和式(4.26)证明与系 3.4 类似的结论。即如果 $A\subset f^{-1}(A)$，则 $s=\dim_B A$ 且 $\mathcal{H}^s(A)>0$，以及如果 $f(A)\supset A$，则 $s=\dim_B A$ 且 $\mathcal{H}^s(A)<\infty$。

# 第 5 章　热力学形式体系

许多数学问题都可以简单地在“线性”情形下解决，但相对应的非线性问题却很难分析处理。例如，三分康托集 $E$ 是由式(2.24)给出的 $\mathbb{R}$ 上的两个相似变换组成的 IFS 的吸引子。从这样的“线性”描述很快地得到了康托集的许多性质，例如利用定理 2.7 可知它的维数是 log2/log3。然而我们想处理像在第 4 章中描述的 cookie-cutter 集那样的“非线性”集，如由 IFS(4.7) 所决定的 [0,1] 的子集，这些非线性构造较难分析，既没有关于 $E$ 的维数的简单的表达式，也不清楚如何得到精确的维数估计。

本章描述一种方法，它使得在线性或分段线性情形得到的许多结果和思想能够推广到非线性情形。主要的目的是导出由非线性系统定义的分形的维数公式，而且动力系统和分形的许多其它方面也可以利用这种方法处理。

为易于叙述，将介绍在 4.1 节中描述的 cookie-cutter 系统的热力学形式体系，并且这也说明了热力学形式体系的基本思想能得到更加广泛的应用。

本章的许多概念首先是在统计力学中提出的，这是一个与动力系统平行的令人注意的学科，请参见 5.6 节。这就是为什么命名为“热力学形式体系”并出现诸如“压力”、“Gibbs 测度”以及“熵”这些术语的缘故。需要强调的是，在这里并不一定要有统计力学的知识。

## 5.1　压力和 Gibbs 测度

热力学形式体系由两个部分组成，即适当的动力系统或 IFS，和定义在相应不变集上的李卜希兹函数。

这里将处理 4.1 节中所描述的 cookie-cutter 系统。回顾一下有关记号：$X$ 是实的闭区间，具有不交的子区间 $X_1$ 和 $X_2$，$f:X_1\cup X_2\to X$ 是扩张映射，它具有连续的二阶导数，并且将 $X_1$ 和 $X_2$ 双射到 $X$ 上。这个动力系统有一个 cookie-cutter 斥子 $E$，它可以等价地看作是由 $X$ 上的一对压缩映射$\{F_1,F_2\}$组成的 IFS 的吸引子。这里仍使用 4.1 节的记号，特别仍用 1 和 2 组成的序列标记不同层次的嵌套状区间 $X_i$。

还有李卜希兹函数 $\phi: X_1\cup X_2\to\mathbb{R}$，存在 $a>0$，使

$$|\phi(x)-\phi(y)|\leqslant a|x-y| \qquad (x,y\in X_1\cup X_2) \tag{5.1}$$

与 4.2 节一样，应用那里提到的有界变差理论，对 $x\in\bigcup_{i\in I_k}X_i$，记

$$S_k\phi(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j x) \tag{5.2}$$

由命题 4.1 知，存在数 $b$ 使

$$|S_k\phi(x)-S_k\phi(y)|\leqslant b \tag{5.3}$$

或等价地，对任意 $x,y\in X_i$，及任意 $i\in I_k$和任意 $k$，

$$\mathrm{e}^{-b}\leqslant\frac{\exp(S_k\phi(x))}{\exp(S_k\phi(y))}\leqslant\mathrm{e}^{b} \tag{5.4}$$

我们从研究一般的李卜希兹函数 $\phi$ 开始。在下一节中将选取适当的 $\phi$ 导出 $E$ 的维数公式。

第一个目标是寻找一个由 $E$ 支撑的测度 $\mu$ 和一个数 $P(\phi)$，使对任意的 $i\in I_k$ 及 $x\in X_i$，

$$\mu(X_i)\asymp\exp(-kP(\phi))\exp(S_k\phi(x))$$

数 $P(\phi)$ 相当重要，称它为 $\phi$ 的压力，测度 $\mu$ 则称为 $\phi$ 的 Gibbs 测度。

现在证明下面定理的(a)部分，在下一节可用它来建立 $E$ 的维数的公式。对结论(b)，则可以进一步加强关于 $\mu$ 的条件，它的证明涉及到较复杂的泛函分析，故把它放到 5.3 节中证明。

**定理 5.1**

(a) 对任意 $k$ 和 $\mathbf{i}\in I_k$，设 $x_{\mathbf{i}}\in X_{\mathbf{i}}$，则极限

$$P(\phi)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\exp S_k\phi(x_{\mathbf{i}}) \tag{5.5}$$

存在，且不依赖于 $x_{\mathbf{i}}\in X_{\mathbf{i}}$ 的选取。而且，存在支撑在 $E$ 上的波雷尔概率测度 $\mu$ 和数 $a_0>0$，使对任意 $k$ 和任意 $\mathbf{i}=i_1,\cdots,i_k\in I_k$，

$$a_0^{-1}\leqslant\frac{\mu(X_{i_1,\cdots,i_k})}{\exp(-kP(\phi)+S_k\phi(x))}\leqslant a_0 \tag{5.6}$$

对任意 $x\in X_{i_1,\cdots,i_k}$ 成立。

(b) 可以选择到满足式(5.6)的测度$\mu$，且或者

(i) $\mu$ 对任意波雷尔集 $A$，满足变换性质

$$\mu(f(A))=\exp P(\phi)\int_A\exp(-\phi(x))\mathrm{d}\mu(x)$$

或者

(ii) $\mu$ 在 $f$ 之下是不变的，即对任意 $g\in C(E)$，

$$\int g(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int g(f(x))\mathrm{d}\mu(x)$$

**证明**(a) 固定 $w\in E$。由式(5.2)，对 $k,m=1,2,\cdots$，

$$S_{k+m}\phi(x)=S_k\phi(x)+S_m\phi(f^kx) \tag{5.7}$$

取指数函数并求和，则由式(5.4)

$$\begin{aligned}\sum_{x:f^{k+m}x=w}\exp S_{k+m}\phi(x)&=\sum_{x:f^{k+m}x=w}\exp(S_k\phi(x))\exp(S_m\phi(f^kx))\\&=\sum_{z:f^mz=w}\sum_{x:f^kx=z}\exp(S_k\phi(x))\exp(S_m\phi(f^kx))\\&=\sum_{z:f^mz=w}\exp(S_m\phi(z))\sum_{x:f^kx=z}\exp(S_k\phi(x))\\&\leqslant e^b\sum_{z:f^mz=w}\exp(S_m\phi(z))\sum_{x:f^kx=w}\exp(S_k\phi(x))\end{aligned}$$

如果记

$$s_k = \sum_{x:f^k x = w} \exp(S_k \phi(x)) \tag{5.8}$$

则上式即是下面的不等式的右边不等式

$$e^{-b} s_k s_m \leqslant s_{k+m} \leqslant e^b s_k s_m \tag{5.9}$$

而左边的不等式可以利用式(5.4)的另一个不等式用相同方法得到。取对数且记 $a_k = \log s_k$，即得

$$a_k + a_m - b \leqslant a_{k+m} \leqslant a_k + a_m + b$$

由系 1.2, $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log s_k$ 存在，即在这种情形下极限(5.5)对每个 $\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_k)$ 存在，其中 $x_{\boldsymbol{i}} = F_{i_1} \circ \cdots \circ F_{i_k} w$。利用式(5.4)知极限(5.5)存在，并且对任意选取的 $x_{\boldsymbol{i}} \in X_{\boldsymbol{i}}$ 极限是相同的。同时注意到如果把系 1.2 应用到序列$(a_k)$和$(-a_k)$，则可以得到对任意的 $k$，$kP(\phi) - b \leqslant a_k \leqslant kP(\phi) + b$，即

$$e^{-b} \exp(kP(\phi)) \leqslant s_k \leqslant e^b \exp(kP(\phi)) \tag{5.10}$$

现在通过在 $\mathbb{R}$ 上定义离散测度 $\mu_m$，并取 $m \to \infty$ 的极限的方法构造一个满足式(5.6)的测度。对 $m = 1, 2, \cdots$ 和任意集 $A$，定义

$$\mu_m(A) = \frac{1}{s_m} \sum_{x \in A: f^m x = w} \exp(S_m \phi(x))$$

(即是对所有在 $A$ 中的 $F_{i_1} \circ \cdots \circ F_{i_m} w$ 点求和)。显然 $\mu_m$ 是支撑在 $E$ 上的离散测度(由于 $w \in E$，故对所有满足 $f^m x = w$ 的 $x$，有 $x \in E$)且 $\mu_m(E) = 1$。于是存在支撑在 $E$ 上的波雷尔测度 $\mu$，它是测度序列 $\mu_m$ 的弱极限(见命题 1.9)。

当然 $\mu(E) = 1$。而且，如果 $\boldsymbol{i} \in I_k$ 和 $k \leqslant m$，利用式(5.7)，则

$$\begin{aligned}\mu_m(X_{\boldsymbol{i}}) &= \frac{1}{s_m} \sum_{x \in X_{\boldsymbol{i}}: f^m x = w} \exp(S_m \phi(x)) \\ &= \frac{1}{s_m} \sum_{x \in X_{\boldsymbol{i}}: f^m x = w} \exp(S_k \phi(x)) \exp(S_{m-k} \phi(f^k x))\end{aligned}$$

于是，如果 $y$ 是 $X_i$ 的任意点，由于 $f^k: X_i \to X$ 是双射，则由式(5.4)

$$e^{-b}\mu_m(X_i) \leqslant s_m^{-1}\exp(S_k\phi(y))\sum_{x\in X_i: f^m x=w}\exp(S_{m-k}\phi(f^k x)) \leqslant e^b\mu_m(X_i)$$

或者

$$e^{-b}\mu_m(X_i) \leqslant s_m^{-1}\exp(S_k\phi(y))\sum_{z\in X: f^{m-k}z=w}\exp(S_{m-k}\phi(z)) \leqslant e^b\mu_m(X_i)。$$

利用式(5.8)得

$$e^{-b}\mu_m(X_i) \leqslant \exp\left(S_k\phi(y)\frac{s_{m-k}}{s_m}\right) \leqslant e^b\mu_m(X_i)$$

故由式(5.9)

$$e^{-2b}\mu_m(X_i) \leqslant s_k^{-1}\exp(S_k\phi(y)) \leqslant e^{2b}\mu_m(X_i)$$

以上对所有 $m \geqslant k$ 都成立，所以$(\mu_m)$的子序列的弱极限 $\mu$ 满足

$$\frac{e^{-2b}}{s_k} \leqslant \frac{\mu(X_i)}{\exp(S_k\phi(y))} \leqslant \frac{e^{2b}}{s_k}$$

利用式(5.10)即得不等式(5.6)。

结论(b)可由定理5.5得出，而定理5.5将在5.3节中证明。□

由式(5.5)定义的数 $P(\phi)$ 称为 $\phi$ 的*拓扑压力*或*压力*，对某个 $a_0>0$ 满足式(5.6)的测度称为 $\phi$ 的 *Gibbs 测度*。由定义知 $\phi$ 的任意两个 Gibbs 测度是等价的。上面已经证明了 cookie-cutter 集支撑一个 Gibbs 测度。

在式(5.5)中可取 $x_i$ 是 $X_i$ 中的任意点。由于 $F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}: X \to X_i \subset X$ 是压缩映射，所以存在唯一的 $x_i \in X_i$，满足 $F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}x_i = x_i$，或者等价地满足 $f^k x_i = x_i$。于是，对 $i \in I_k$，可以选取点 $x_i \in X_i$ 为 $f^k$ $2^k$ 个的不动点的集合，即是那些具有的周期能除尽 $k$ 的 $f$ 的

周期点的集合。这就导出了下面的可以避免提到 $X_i$ 的关于压力的表达式:

$$P(\phi)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{x\in \mathrm{Fix}\, f^k}\exp(S_k\phi(x)) \tag{5.11}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{x\in \mathrm{Fix}\, f^k}\exp(\phi(x)+\phi(fx)+\cdots+\phi(f^{k-1}x))$$

其中 $\mathrm{Fix} f^k$ 表示 $f^k$ 的不动点的集合。

## 5.2 维数公式

通过适当地选取李卜希兹函数，上一节的理论可以转化为通过压力表达的关于 cookie-cutter 集 $E$ 的优美的豪斯道夫维数公式。

为了寻找集合的豪斯道夫测度和维数，需要估计式(2.7) 中的和。对 cookie-cutter 集 $E$, 自然要利用由区间$\{X_i: i\in I_k\}$ 提供的 $E$ 的覆盖。只要选取 $k$ 使 $\max_{i\in I_k}|X_i|\leqslant\delta$, 则

$$\mathcal{H}^s_\delta(E)\leqslant\sum_{i\in I_k}|X_i|^s \tag{5.12}$$

令 $\delta\to 0$, 则

$$\mathcal{H}^s(E)\leqslant\liminf_{k\to\infty}\sum_{i\in I_k}|X_i|^s \tag{5.13}$$

由此可知，对任意使上式的下极限有限的 $s$, $\dim_H E\leqslant s$。然而，正如我们将要看到的，还含有更多的内容。在 $f$ 的非常一般的条件下，这些和有非常好的性状，它满足 $\sum_{i\in I_k}|X_i|^s\asymp\exp(kP_s)$, 这里$P_s$是某个函数的压力。于是压力 $P_s$ 是第$k$层嵌套状区间长度的 $s$ 次幂和的指数增长速度。而且，在式(5.13) 中的极限给出$\mathcal{H}^s(E)$的下估计同时也是上估计，故豪斯道夫维数等于使 $P_s=0$ 的数 $s$, 更进一步，$\mathcal{H}^s$ 在 $E$ 上的限制是 Gibbs 测度。

对 $s\in\mathbb{R}$, 在式(5.1) 中取

$$\phi(x)=-s\log|f'(x)| \tag{5.14}$$

并把压力 $P(-s\log|f'|)$ 看成随 $s$ 变化，其中 $f'$ 是 $f$ 的导数。那么任意选取 $x_i \in X_i$，利用式(5.2)、(4.16)和(4.18)，式(5.5)变成

$$P(-s\log|f'|)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{i\in I_k}\exp\left(\sum_{j=0}^{k-1}-s\log|f'(f^j x_i)|\right) \tag{5.15}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{i\in I_k}|(f^k)'(x_i)|^{-s} \tag{5.16}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{i\in I_k}|X_i|^s \tag{5.17}$$

(注意上式与式(5.13)的相似之处。)下面考察 $P(-s\log|f'|)$ 随 $s$ 变化的情况。

**引理 5.2**

对 $s\in\mathbb{R}$ 和 $\delta>0$，

$$-\delta m_2\leqslant P(-(s+\delta)\log|f'|)-P(-s\log|f'|)\leqslant-\delta m_1 \tag{5.18}$$

其中

$$0<m_1\equiv\inf_{x\in X_1\cup X_2}\log|f'(x)|\leqslant\sup_{x\in X_1\cup X_2}\log|f'(x)|\equiv m_2<\infty.$$

特别，$P(-s\log|f'|)$ 对 $s$ 是严格递减和连续的，且满足 $\lim_{s\to-\infty}P(-s\log|f'|)=\infty$ 和 $\lim_{s\to\infty}P(-s\log|f'|)=-\infty$。

**证明**　对 $\delta>0$

$$\frac{1}{k}\log\sum_{i\in I_k}\exp\left(\sum_{j=0}^{k-1}-(s+\delta)\log|f'(f^j x_i)|\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{k}\log\sum_{i\in I_k}\left(\exp\left(\sum_{j=0}^{k-1}-s\log|f'(f^j x_i)|\right)\exp(-\delta k m_1)\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{k}\log\left(\sum_{i\in I_k}\exp\left(\sum_{j=0}^{k-1}-s\log|f'(f^j x_i)|\right)\right)-\delta m_1$$

令 $k\to\infty$ 并利用式(5.15)得到式(5.18)的右边不等式。左边不等式用相同方法可以得到。□

于是 $P(-s\log|f'|)$ 的图形具有图 5.1 所示的形式(函数是凸的，见练习 5.5)。特别，存在唯一的数 $s$ 满足 $P(-s\log|f'|)=0$。这个数即是 cookie-cutter 集 $E$ 的豪斯道夫维数。

**定理 5.3**

设 $s$ 是唯一满足下式的实数

$$P(-s\log|f'|)=0 \tag{5.19}$$

那么 $\dim_H E=s$ 且 $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$。并且，$\mathcal{H}^s$ 在 $E$ 上的限制是 Gibbs 测度，特别，存在数 $a_1>0$，使对任意 $\boldsymbol{i}\in I_k$ 和任意 $k$，

$$a_1^{-1}|X_{\boldsymbol{i}}|^s\leqslant \mathcal{H}^s(E\cap X_{\boldsymbol{i}})\leqslant a_1|X_{\boldsymbol{i}}|^s \tag{5.20}$$

**证明** 设 $s$ 由式(5.19)确定，对这个 $s$，取 $\phi(x)=-s\log|f'(x)|$，令 $\mu$ 是由定理 5.1 给出的相应的 Gibbs 测度。由于 $P(\phi)=0$，对任意 $x\in X_{\boldsymbol{i}}$，任意 $\boldsymbol{i}\in I_k$ 及所有 $k$，式(5.6)变为

$$a_0^{-1}\leqslant\mu(X_{\boldsymbol{i}})/\exp(S_k\phi(x))\leqslant a_0$$

故利用式(4.16)的链条法则，即

$$a_0^{-1}\leqslant\mu(X_{\boldsymbol{i}})/\exp\left(-s\sum_{j=0}^{k-1}\log|f'(f^jx)|\right)=\mu(X_{\boldsymbol{i}})/|(f^k)'(x)|^{-s}\leqslant a_0$$

联合上式以及式(4.18)，知存在数 $a_2$，使对任意 $\boldsymbol{i}$

$$a_2^{-1}\leqslant\frac{\mu(X_{\boldsymbol{i}})}{|X_{\boldsymbol{i}}|^s}\leqslant a_2 \tag{5.21}$$

于是，$\mu$ 是由 $E$ 支撑的，且在每个区间 $X_{\boldsymbol{i}}$ 上的测度值与 $|X_{\boldsymbol{i}}|^s$ 可比的概率测度。

由有界畸变原理的推论，测度 $\mu$ 可能与 $E$ 上的豪斯道夫测度有关。设 $x\in E$，$r<c_{\min}^{-1}|X|$ (4.2 节的记号)，下面来估计 $\mu(B(x,r))$，这里 $B(x,r)$ 是中心在 $x$ 长度为 $2r$ 的区间(一维球)。利用式(4.6)可以找到整数 $k$ 和 $\boldsymbol{i}\in I_k$，使 $x\in X_{\boldsymbol{i}}$ 且

$$|X_{\boldsymbol{i}}|\leqslant r<c_{\min}^{-1}|X_{\boldsymbol{i}}|.$$

由式(4.24)知，

$$\mu(B(x,\lambda r)) \leqslant \mu(X_i) \leqslant \mu(B(x,r))$$

这里 $\lambda = db_1^{-1}c_{\min}$ 是与 $x$ 和 $r$ 无关的，故由式(5.21)

$$a_2^{-1}\mu(B(x,\lambda r)) \leqslant |X_i|^s \leqslant a_2\mu(B(x,r))$$

于是，存在 $b_2>0$ 使

$$b_2^{-1}r^s \leqslant \mu(B(x,r)) \leqslant b_2 r^s \tag{5.22}$$

对任意 $x \in E$ 和充分小的 $r$ 均成立。由命题 2.2 知 $b_2^{-1} \leqslant \mathcal{H}^s(E) \leqslant 2^s b_2$，且 $\dim_H E = \dim_B E = s$。类似地，可推出 $\mu$ 等价于 $s$ 维豪斯道夫测度在 $E$ 上的限制，即对每个波雷尔集 $A$，$b_2^{-1}\mathcal{H}^s(E\cap A) \leqslant \mu(A) \leqslant 2^s b_2 \mathcal{H}^s(E\cap A)$。取 $A = X_i$ 并联合上式与式(5.21)就得到了式(5.20)。 □

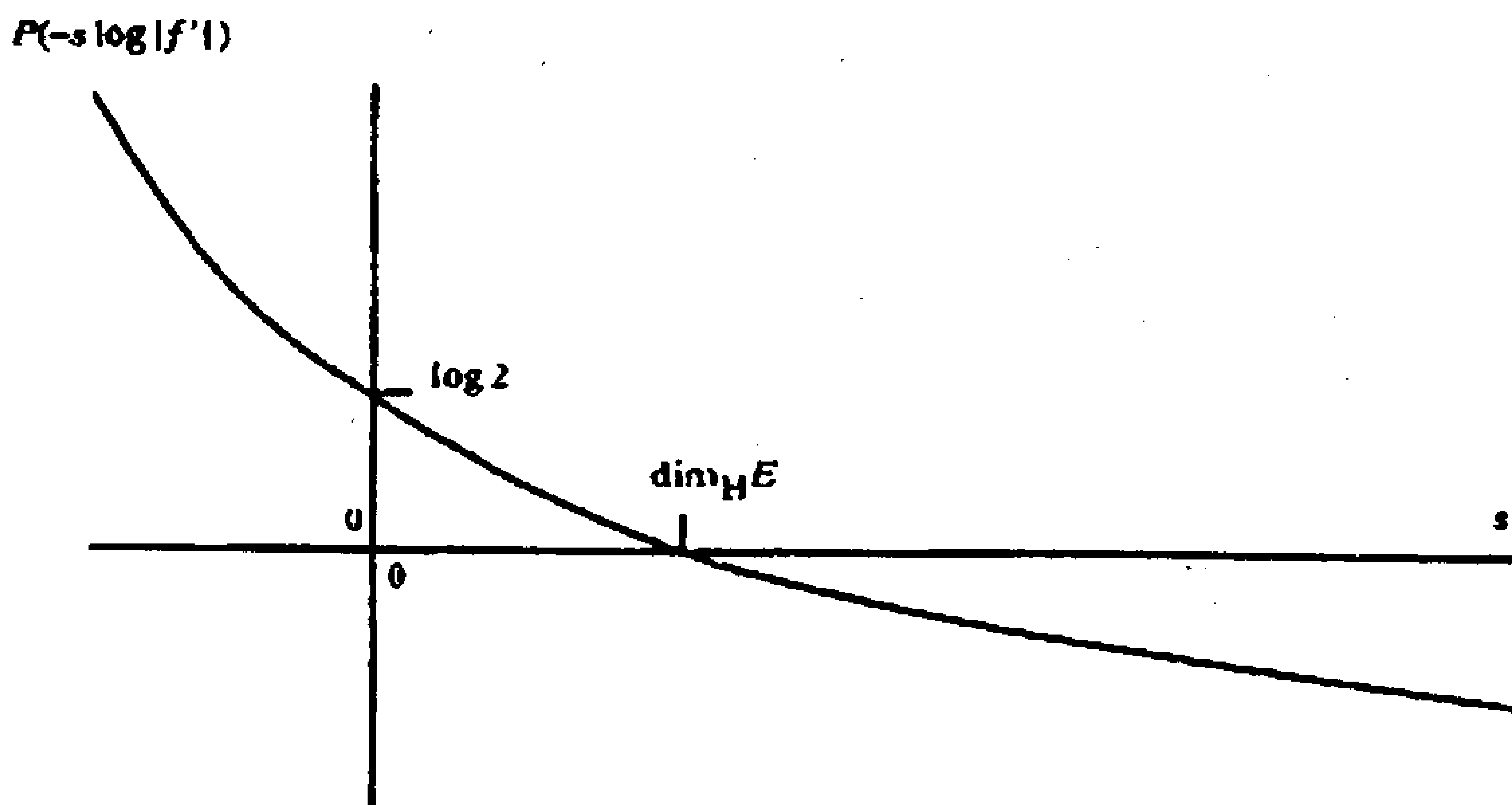



图 5.1 关于一个(两部分) cookie-cutter 系统的压力函数 $P(-s\log|f'|)$ 的形式

可以从几个方面考察维数公式 (5.19)。选取式(5.16) 中的 $x_i$ 为 $f^k$ 的不动点，就像在式(5.11) 中一样，通过动力学的术语得出的 $\dim_H E$ 是等于满足下式的 $s$ 值。

$$0 = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\sum_{x\in \mathrm{Fix} f^k}|(f^k)'(x)|^{-s}$$

同样利用式(5.17), $\dim_H E$ 是使

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i\in I_k}|X_i|^s\right)^{\frac{1}{k}}=1 \tag{5.23}$$

的 $s$ 值。而且，在式(5.20)中，对所有 $i\in I_k$ 求和，即知对任意 $k$，$0<a_1^{-1}\mathcal{H}^s(E)\leqslant\sum_{i\in I_k}|X_i|^s\leqslant a_1\mathcal{H}^s(E)<\infty$。于是这些自然的和给出了关于豪斯道夫测度的界，可将这些与式(5.13)比较。

在 $E$ 是自相似集以及 $F_1$ 和 $F_2$ 是相似比为 $r_1$ 和 $r_2$ 的相似变换的特殊情形，$\dim_H E$ 是满足 $r_1^s+r_2^s=1$ 的数 $s$, 见式(2.42).这里 $f^k: X_{i_1\cdots i_k}\to X$ 是相似比为 $(r_{i_1}\cdots r_{i_k})^{-1}$ 的相似变换，故

$$\sum_{i\in I_k}|(f^k)'(x_i)|^{-s}=\sum_{i\in I_k}(r_{i_1}\cdots r_{i_k})^s=(r_1^s+r_2^s)^k=1$$

利用式(5.16), $s$ 满足 $P(-s\log|f'|)=0$, 故压力公式确实是关于自相似集的维数公式到非线性集上的推广。

值得注意的是，通过考察压力公式的导数，对式(5.16)的收敛速率有一个控制。事实上，如果对 $x,y\in X_i$ 和 $i\in I_k$, $b$ 是使 $s|\log|(f^k)'(x)|-\log|(f^k)'(y)||\leqslant b$ 的数，则对任意 $k$,

$$\left|P(-s\log|f'|)-\frac{1}{k}\log\sum_{i\in I_k}|(f^k)'(x_i)|^{-s}\right|\leqslant\frac{2b}{k} \tag{5.24}$$

见练习 5.2, 上式与式(5.18)一起，使对 $\dim_H E$ 的逼近的精度能得到估计。

## *5.3 不变测度和变换算子

本节介绍关于热力学形式体系的一些稍微复杂的方面，同时导出压力的一个可供选择的特征。测度起的主要作用是在 cookie-cutter 函数 $f$ 下的不变性，即由 $E$ 支撑的测度 $\mu$ 对每个连续函数 $g: E\to\mathbb{R}$ 都满足

$$\int g(f(x))\mathrm{d}\mu(x)=\int g(x)\mathrm{d}\mu(x) \tag{5.25}$$

上式等价于对每个波雷尔集 $A$, $\mu(f^{-1}(A))=\mu(A)$。在下一节中将导出不变原理，即压力是对 $E$ 上的所有不变概率测度 $\mu$ 的一定的表达式的上确界。

为进一步论证，首先要证明可选择定理 5.1 中的测度 $\mu$ 为不变的。这个特别的，同时也是相当微妙的论证通常需要利用算子 $L_\phi$ 的性质，通过泛函分析的方法来实现的。

设 $E$ 是关于 $f$ 的 cookie-cutter 斥子，$\phi:E\to\mathbb{R}$ 是如上所述的李卜希兹函数。记 $C(E)$ 是 $E$ 上的实值连续函数空间。定义变换算子或称 *Sinai-Bowen-Ruelle* 算子 $L_\phi$: $C(E)\to C(E)$ 为

$$(L_\phi g)(x)=g(F_1x)\mathrm{e}^{\phi(F_1x)}+g(F_2x)\mathrm{e}^{\phi(F_2x)} \tag{5.26}$$

$$=\sum_{y:f(y)=x} g(y)\mathrm{e}^{\phi(y)} \tag{5.27}$$

算子 $L_\phi$ 是线性的(即 $L_\phi(g_1+g_2)=L_\phi g_1+L_\phi g_2$ 和 $L_\phi(\lambda g)=\lambda(L_\phi g)$ 对数量 $\lambda$ 成立)和正的(即如果对任意 $x\in E$, $g(x)>0$, 那么对任意 $x\in E$, $(L_\phi g)(x)>0$)。

有时需要重复地应用算子 $L_\phi$。记 $L_\phi^k$ 为 $L_\phi$ 的 $k$ 次迭代(故有 $L_\phi^2 g=L_\phi(L_\phi g)$, 等等), 通过对式(5.26)进行反复的迭代，可得

$$\begin{aligned}(L_\phi^k g)(x)=&\sum_{(i_1,\cdots,i_k)\in I_k} g(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}x)\exp[\phi(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}x)\\&+\phi(F_{i_2}\circ\cdots\circ F_{i_k}x)+\cdots+\phi(F_{i_k}x)]\\=&\sum_{(i_1,\cdots,i_k)\in I_k} g(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}x)\exp(S_k\phi(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}x))\end{aligned} \tag{5.28}$$

下面的联系 $L_\phi$ 和 $f$ 的恒等式是有用的。设 $g_1,g_2\in C(E)$, 则

$$\begin{aligned}(L_\phi((g_1\circ f)\times g_2))(x)&=\sum_{i=1,2} g_1(f(F_ix))g_2(F_ix)\mathrm{e}^{\phi(F_ix)}\\&=\sum_{i=1,2} g_1(x)g_2(F_ix)\mathrm{e}^{\phi(F_ix)}\\&=g_1(x)(L_\phi g_2)(x)\end{aligned} \tag{5.29}$$

变换算子的主要性质将由下面的定理给出，它是 Ruelle-Perron-Frobenius 定理的一种叙述方法。

**定理 5.4**

(a) 存在 $\lambda>0$ 及对 $x\in E$, 恒大于零的 $w(x)$, 且 $w\in C(E)$, 使 $w$ 是 $L_\phi$ 的具有特征值 $\lambda$ 的特征函数，即

$$L_\phi w=\lambda w \tag{5.30}$$

(b) 存在支撑在 $E$ 上的波雷尔概率测度 $\mu$, 使对任意 $g\in C(E)$,

$$\int(L_\phi g)\mathrm{d}\mu=\lambda\int g\mathrm{d}\mu \tag{5.31}$$

(c) 对任意的 $g\in C(E)$, 由

$$\int g\mathrm{d}\nu=\int gw\mathrm{d}\mu \tag{5.32}$$

定义的测度 $\nu$ 在 $f$ 下是不变的。(假设 $w$ 是规范化的，故 $\nu(E)=1$。)

**证明** 由于 $\phi$ 是李卜希兹映射，故存在足够大的数 $a>0$, 使对 $x,y\in E$ 和 $i=1,2$, $\mathrm{e}^{|\phi(F_ix)-\phi(F_iy)|}\leqslant\mathrm{e}^{a|x-y|}$。设 $c_{\max}<1$ 如式(4.4)中一样，固定 $\alpha>0$ 且 $\alpha c_{\max}+a\leqslant\alpha$。设 $\beta=\mathrm{e}^{-\alpha|E|}>0$, 其中 $|E|$ 是 $E$ 的直径。定义

$$B=\{g\in C(E):\text{对任意 }x,y\in E,\ \beta\leqslant g(x)\leqslant 1\text{ 及 }g(x)\leqslant g(y)\mathrm{e}^{\alpha|x-y|}\}$$

则 $B$ 是凸集 (即如果 $g_1,g_2\in B$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$, 则 $tg_1+(1-t)g_2\in B$), 且 $B$ 是 $C(E)$ 的同等连续的子集，故由 Arzela－Ascoli 定理知，$B$ 是 $C(E)$ 在范数 $\|\ \|_\infty$ 之下的紧子集。下面证明 $L_\phi$ 的一个规范化的形式将 $B$ 映射到它自身，也即它具有不动点。

设 $g$ 满足

$$0\leqslant g(x)\leqslant g(y)\mathrm{e}^{\alpha|x-y|}\qquad(x,y\in E) \tag{5.33}$$

那么如果 $x,y\in E$, 则 $|F_ix-F_iy|\leqslant c_{\max}|x-y|$, 故由式(5.26)

$$(L_\phi g)(x) \leqslant \sum_{i=1,2} g(F_i y) e^{\alpha c_{max}|x-y|} e^{\alpha|x-y|} e^{\phi(F_i y)}$$
$$\leqslant e^{\alpha|x-y|}(L_\phi g)(y) \tag{5.34}$$

利用 $T_\phi g(x)=L_\phi g(x)/\|L_\phi g\|_\infty$，在 $B$ 上定义规范化的映射 $T_\phi$。由上面知，对 $x,y\in E$，$(T_\phi g)x\leqslant e^{\alpha|x-y|}(T_\phi g)(y)$。由于 $\|T_\phi g\|_\infty=1$，所以，对任意 $y\in E$，$\beta=e^{-\alpha|E|}\leqslant(T_\phi g)(y)\leqslant 1$。于是 $T_\phi$ 映射紧凸集 $B$ 到它自己，故由 Schauder 不动点定理，存在 $w\in B$ 使 $T_\phi w=w$，或 $L_\phi w=\lambda w$，其中 $\lambda=\|L_\phi w\|_\infty$。由于 $w\in B$，即得 $w(x)>0$ 和 $\lambda>0$，这就完成了 (a) 的证明。

现在定义测度集合 $\mathcal{M}\equiv\{\mu:\mathrm{spt}\mu\subset E$ 和 $\int w\mathrm{d}\mu=1\}$，这里 $w$ 如(a) 中所示。可把 $\mathcal{M}$ 看作是 $E$ 上的连续线性函数空间 $C(E)^*$ 的子集，也许可以等同于 $E$ 上的符号测度集。记 $L_\phi^*$ 为 $C(E)^*$ 上的映射 $L_\phi$ 的对偶映射，对 $g\in C(E)$，$L_\phi^*$ 由下式定义：

$$\int g\mathrm{d}(L_\phi^*\mu)=\int(L_\phi g)\mathrm{d}\mu \tag{5.35}$$

那么对 $\mu\in\mathcal{M}$

$$\int w\mathrm{d}\left(\frac{1}{\lambda}L_\phi^*\mu\right)=\int\frac{1}{\lambda}(L_\phi w)\mathrm{d}\mu=\int w\mathrm{d}\mu=1$$

因此 $\frac{1}{\lambda}L_\phi^*$ 将 $\mathcal{M}$ 映射到它自己。由于 $\mathcal{M}$ 是凸的，且在弱-* 拓扑的意义下是 $C(E)^*$ 的紧子集，由 Schauder 不动点定理知，存在测度 $\mu\in\mathcal{M}$，使 $\frac{1}{\lambda}L_\phi^*\mu=\mu$。于是由式(5.35) 保证了式(5.31) 成立，可用常数乘 $\mu$ 使 $\mu(E)=1$，这就保证了 $\mu$ 是如 (b) 所需的概率测度。

为验证由式 (5.32) 给出的 $\nu$ 是在 $f$ 下不变的，设 $g\in C(E)$，则

$$\int g(x)\mathrm{d}\nu(x)=\int g(x)w(x)\mathrm{d}\mu(x) \qquad \text{由式(5.32)}$$

$$=\lambda^{-1}\int g(x)(L_\phi w)(x)\mathrm{d}\mu(x) \qquad \text{由式(5.30)}$$

$$= \lambda^{-1}\int (L_\phi((g\circ f)\times w))(x)\mathrm{d}\mu(x) \quad \text{由式(5.29)}$$

$$= \lambda^{-1}\lambda\int (g\circ f)(x)w(x)\mathrm{d}\mu(x) \quad \text{由式(5.31)}$$

$$= \int g(f(x))\mathrm{d}\nu(x) \quad \text{由式(5.32)}$$

□

变换算子有许多其它重要的谱性质，这里就不深入介绍了，例如 $\lambda$ 是重数为 1 的特征值，且使 $L_\phi$ 的谱的留数是在一个半径严格小于 $\lambda$ 的圆盘内。

变换算子与压力 $P(\phi)$ 有密切的关系。定理 5.4 的特征值 $\lambda$ 结果是等于 $\exp P(\phi)$，而且 $\mu$ 和 $\nu$ 则是关于 $\phi$ 的 Gibbs 测度。这是在下个定理中阐述的内容，它通过证明 Gibbs 测度可以选取为不变测度而推广了定理 5.1。

**定理 5.5**

设 $\lambda$, $\mu$ 和 $\nu$ 如定理 5.4 中所述，则 $\log\lambda = P(\phi)$，且 $\mu$ 和 $\nu$ 是关于 $\phi$ 的 Gibbs 测度。于是 $\mu$ 和 $\nu$ 是 $E$ 上的波雷尔概率测度，对任意 $k$ 和 $\mathbf{i}\in I_k$, $x\in X_{\mathbf{i}}$，存在数 $a_0>0$，使

$$a_0^{-1} \leqslant \frac{\mu(X_{\mathbf{i}})}{\exp(-kP(\phi)+S_k\phi(x))},\ \frac{\nu(X_{\mathbf{i}})}{\exp(-kP(\phi)+S_k\phi(x))} \leqslant a_0 \tag{5.36}$$

测度 $\nu$ 在 $f$ 下是不变的。测度 $\mu$ 对任意波雷尔集 $A\subset E$ 和 $k=1,2,\cdots$ 满足

$$\mu(f^k(A)) = \exp kP(\phi)\int_A \exp(-S_k\phi(x))\mathrm{d}\mu(x) \tag{5.37}$$

**证明** 记 $1_A$ 为集合 $A$ 的示性函数。设 $\mathbf{i}=(i_1,\cdots,i_k)\in I_k$，由于 $F_{j_1}\circ\cdots\circ F_{j_k}x\in X_{i_1,\cdots,i_k}$ 当且仅当 $j_1=i_1,\cdots,j_k=i_k$ 成立，因为 $x\in f^k(A)$

当且仅当对 $A \subset X_{i_1,\cdots,i_k}$, $F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(x) \in A$, 所以由式(5.28) 知，对 $A \subset X_{i_1,\cdots,i_k} \cap E$,

$$\begin{aligned} L_\phi^k(\mathrm{e}^{-S_k\phi(x)}1_A(x)) &= \exp(-S_k\phi(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}x))1_A(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}x) \\ &\quad \times \exp(S_k\phi(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}x)) \\ &= 1_{f^k(A)}(x) \end{aligned}$$

两边积分并利用式 (5.31) $k$ 次，即得

$$\begin{aligned} \mu(f^k(A)) &= \int 1_{f^k(A)}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int L_\phi^k(\mathrm{e}^{-S_k\phi(x)}1_A(x))\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \lambda^k\int \mathrm{e}^{-S_k\phi(x)}1_A(x)\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \lambda^k\int_A \mathrm{e}^{-S_k\phi(x)}\mathrm{d}\mu(x) \end{aligned} \tag{5.38}$$

对 $\iota\in I_k$, 上式对任意包含在 $X_\iota \cap E$ 中的波雷尔集 $A$ 都成立，故由可加性知式(5.38) 对任意波雷尔集 $A\subset E$ 成立。在式(5.38) 中令 $A = X_\iota \cap E$, 利用式 (5.4), 则对所有 $y\in X_\iota$,

$$\mathrm{e}^{-b} \leqslant \lambda^k \mathrm{e}^{-S_k\phi(y)}\mu(X_\iota) \leqslant \mathrm{e}^b$$

对所有的 $\iota\in I_k$ 求和，并与式(5.5) 比较，显然有 $P(\phi)=\log\lambda$, 故由式(5.38) 得到式(5.37), 同时也得到关于 $\mu$ 的不等式(5.36)。因为由式(5.32)

$$(\inf_{x\in E} w(x))\mu(X_\iota) \leqslant \nu(X_\iota) \leqslant (\sup_{x\in E} w(x))\mu(X_\iota)$$

这里 $0<\inf_{x\in E}w(x)\leqslant\sup_{x\in E}w(x)<\infty$, 所以对等价的测度 $\nu$, 式(5.36) 也成立。 □

注意，由定理 5.5 立即可以得出定理 5.1 的(b) 部分。

现在容易推出 Gibbs 测度的一个更重要的性质，称之为遍历性。如果对每个可测的不变集 $A\subset X$( 在 $f^{-1}(A)=A$ 的意义下 ),

或者 $\mu(A)=0$, 或者 $\mu(X\backslash A)=0$, 则称测度 $\mu$ 关于 $f$ 是遍历的。于是在遍历的情形，唯一不变的集是那些用 $\mu$ 来度量时是平凡的集。

如果 $A$ 是不变集，那么 $A=\bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(A) \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(X)=E$, 故 $A \subset E$。进一步，$A=\bigcup_{\iota \in I_k} F_{i_1} \circ \cdots \circ F_{i_k}(A)$，所以 $A \cap X_\iota = F_{i_1} \circ \cdots \circ F_{i_k}(A)$, 且

$$f^k(A \cap X_\iota)=A \tag{5.39}$$

**系 5.6**

任何满足式(5.6) 的 Gibbs 测度 $\mu$ 是关于 $f$ 遍历的。

**证明** 首先设 $\mu$ 为定理 5.5 中满足式(5.37) 的测度. 如果 $A$ 是不变集，那么 $A \subset E$, 由式(5.39) 和式(5.37), 对任意 $\iota \in I_k$, 有

$$\mu(A)=\mu(f^k(A \cap X_\iota))=\exp kP(\phi)\int_{A \cap X_\iota} \exp(-S_k \phi(x)) \mathrm{d}\mu(x)$$

于是由式(5.4), 对任意 $x \in X_\iota$,

$$\mathrm{e}^{-b}\mu(A) \leqslant \exp(kP(\phi)-S_k \phi(x))\, \mu(A \cap X_\iota)$$

用完全相同的方法，以不变集 $E$ 替代 $A$, 即

$$\exp(kP(\phi)-S_k \phi(x))\, \mu(E \cap X_\iota) \leqslant \mathrm{e}^{b}\mu(E)$$

但是 $\mu(E)=1$ 且 $\mu$ 的支撑是 $E$, 故联合这些不等式，对所有 $X_\iota$ 都有：

$$\mu(A)\mu(X_\iota)=\mu(A)\mu(E \cap X_\iota) \leqslant \mathrm{e}^{2b}\mu(A \cap X_\iota)$$

由于 $\{X_\iota \cap E: \iota \in I_k,\ k=0,1,\cdots\}$ 生成了 $E$ 的波雷尔子集，故对每个波雷尔集 $B \subset E$:

$$\mu(A)\mu(B) \leqslant \mathrm{e}^{2b}\mu(A \cap B)。$$

取 $B=E\backslash A$, 就有 $\mu(A)\mu(E\backslash A) \leqslant \mathrm{e}^{2b}\mu(A \cap (E\backslash A))=0$, 这就得到了所需要的或者 $\mu(A)=0$, 或者 $\mu(E\backslash A)=0$。

由定义(5.6), 任何其它的相应于给定的 $\phi$ 的 Gibbs 测度 $\nu$, 在式(1.22) 的意义下等价于这个 $\mu$。因此如果 $A$ 是不变集，那么或

者 $\nu(A)=0$，或者 $\nu(E\backslash A)=0$。 □

本节的一个结论是，Gibbs 测度可以同时选取为在 $f$ 下不变和遍历的。这样的测度在遍历理论中起到了特别重要的作用，就如我们将在第 6 章中看到的一样。

## 5.4 熵和变分原理

熵量化了一种速率，可以按此速率从一系列重复的观察中得到有关动力系统的信息。在一定的意义下，等价的系统具有同样的熵。因此熵是动力系统理论中的一个重要的不变量。这里首先定义熵，然后推出变分原理：压力在涉及熵的表达式中取最大值。

下面继续讨论 4.1 节中引进的具有 $f: X_1 \cup X_2 \to X$ 和斥子 $E$ 的 cookie – cutter 系统。设 $\mu$ 是 $E$ 上的在 $f$ 下不变的概率测度。考虑下面的“实验”，通过观察一个点 $x \in E$ 的迭代落入 $X_1$ 或 $X_2$ 来确定 $x$ 的位置。对 $j=0,1,2,\cdots$，设 $i_j$ 是使 $f^j x \in X_{i_j}$ 的整数 1 或 2。于是把 $f^j x$ 看作为初始时刻在 $x$ 的质点，经过时间 $j$ 之后所处的位置，把 $x_{i_j}$ 看成是在 $j$ 时刻质点在左边（在 $X_1$ 中）或右边（在 $X_2$ 中）的一个观察。自然要提出的问题是，$k$ 次观察序列 $(X_{i_0}, X_{i_1}, \cdots X_{i_{k-1}})$ 是如何精确地确定点的初始位置 $x$。特别，一个与给定的观察集合相关的 $x$ 的集合的测度值

$$\mu\{x: f^j x \in X_{i_j}, 对\ j=0,1,\cdots,k-1\} = \mu(X_{i_0,\cdots,i_{k-1}}) \quad (5.40)$$

是怎么样的？如果这个测度是较小的，那么 $x$ 是由这 $k$ 次观察（根据测度 $\mu$）较准确地确定。

如果对给定的 $x \in E$，发现对充分大的 $k$，$\mu(X_{i_0,\cdots,i_{k-1}}) \simeq c^k$ 成立，这里 $0<c<1$，那么随着每次成功的观察，我们可以利用一个大约等于 $c$ 的因子改善对 $x$ 的位置的了解。于是关于 $x$ 信息获得的速率大概为

$$-\log c = -\frac{1}{k}\log\mu(X_{i_0,\cdots,i_{k-1}}) = -\frac{1}{k}\log\mu(X_{\boldsymbol{i}}) \qquad (5.41)$$

这里 $\boldsymbol{i}=i_0,i_1,\cdots,i_{k-1}$。当然这个值依赖于 $x$, 而 $x$ 在试验中事先是不知道的。然而，关于测度 $\mu$ ,对所有属于 $E$ 的 $x$ 按式(5.41)的形式取平均，可以得到下面的和式：

$$-\frac{1}{k}\sum_{\boldsymbol{i}\in I_k}\mu(X_{\boldsymbol{i}})\log\mu(X_{\boldsymbol{i}})$$

它表示在时间 $0\leqslant j\leqslant k-1$ 中获得的信息的平均速率，当 $k\to\infty$ 时，取极限就得出了对全部时间的平均值。

这种启发式的讨论，引导我们做出 $f$ 的关于测度 $\mu$ 的熵的定义为：

$$h_\mu \equiv h_\mu(f) = \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{k}\sum_{\boldsymbol{i}\in I_k}\mu(X_{\boldsymbol{i}})\log\mu(X_{\boldsymbol{i}}) \qquad (5.42)$$

当然，这里要事先假定极限存在，利用半可加不等式可以证明这点。

**命题 5.7**

设 $\mu$ 是支撑在 $f$ 的斥子 $E$ 上的不变概率测度，则由式(5.42)定义的熵 $h_\mu(f)$ 存在。

**证明** 只要证明序列 $\sum_{\boldsymbol{i}\in I_k}-\mu(X_{\boldsymbol{i}})\log\mu(X_{\boldsymbol{i}})$ 是半可加的，则由命题 1.1 可知极限(5.42)存在。

为简洁起见，记 $\psi(t)=-t\log t\,(t>0)$, $\psi(0)=0$, 那么 $\psi$ 是 $[0,\infty)$ 上的凹函数，即 $-\psi$ 是凸函数。对正整数 $i$ 和 $j$, 和任意 $\boldsymbol{i}\in I_i$, $\boldsymbol{j}\in I_j$, 假设 $\mu(X_{\boldsymbol{j}})>0$ 对任意 $\boldsymbol{j}\in I_j$ 成立，利用 $\psi$ 的凹性(见命题 1.4) 以及 $\sum_{\boldsymbol{j}\in I_j}\mu(X_{\boldsymbol{j}})=1$,

$$\begin{aligned}\psi(\mu(X_{\boldsymbol{i}})) &= \psi\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in I_j}\mu(X_{\boldsymbol{ij}})\right)\\ &= \psi\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in I_j}\mu(X_{\boldsymbol{j}})\mu(X_{\boldsymbol{ij}})/\mu(X_{\boldsymbol{j}})\right)\\ &\geqslant \sum_{\boldsymbol{j}\in I_j}\mu(X_{\boldsymbol{j}})\psi(\mu(X_{\boldsymbol{ij}})/\mu(X_{\boldsymbol{j}}))\end{aligned}$$

由 $\psi$ 的定义，则

$$\psi(\mu(X_i))\geqslant \sum_{j\in I_j}\mu(X_j)\frac{\mu(X_{ij})}{\mu(X_j)}(\log\mu(X_j)-\log\mu(X_{ij}))$$

$$\geqslant \sum_{j\in I_j}\mu(X_{ij})\log\mu(X_j)+\sum_{j\in I_j}\psi(\mu(X_{ij}))$$

如果 $j\in I_j$ 使 $\mu(X_j)=0$，则可以通过对那些满足 $\mu(X_j)\neq 0$ 的 $j\in I_j$ 求和得到相同的不等式。现在对全部 $i\in I_i$ 求和，注意到由于 $\mu$ 是不变的，$\sum_{i\in I_i}\mu(X_{ij})=\mu(X_j)$，即得：

$$\sum_{i\in I_i}\psi(\mu(X_i))\geqslant \sum_{j\in I_j}\mu(X_j)\log\mu(X_j)+\sum_{ij\in I_{i+j}}\psi(\mu(X_{ij}))$$

于是

$$\sum_{i\in I_{i+j}}\psi(\mu(X_i))\leqslant \sum_{i\in I_i}\psi(\mu(X_i))+\sum_{i\in I_j}\psi(\mu(X_i))$$

换句话说，即序列 $a_i\equiv\sum_{i\in I_i}\psi(\mu(X_i))=\sum_{i\in I_i}-\mu(X_i)\log\mu(X_i)$ 满足半可加性质(1.2)，故由命题 1.1 知极限(5.42) 存在。 □

事实上，熵比由式(5.42)显示出的更为一般。如果 $X=Y_1\cup\cdots\cup Y_m$ 是将 $X$ 划分成有限个（可测的）“盒子”的任意划分，可以对每个 $j$，观察使 $f^jx\in Y_{i_j}$，即 $x$ 的迭代点落入的盒子序列$(Y_{i_0},\cdots,Y_{i_{k-1}})$，并估计获得信息的速率

$$\lim_{k\to\infty}-\frac{1}{k}\sum\mu(Y_{i_0,\cdots,i_{k-1}})\log\mu(Y_{i_0,\cdots,i_{k-1}})$$

这里 $Y_{i_0,\cdots,i_{k-1}}=\{x: f^jx\in Y_{i_j},\ j=0,1,\cdots,k-1\}$。值得注意的是，这个极限存在，且对任何合理的划分 $Y_1\cup\cdots\cup Y_m$ 极限值为 $h_\mu(f)$（合理是在如下的意义上的，如果 $k$ 充分大，观察到的$(Y_{i_0},\cdots,Y_{i_{k-1}})$在几乎所有 $x\in E$ 之间是可分辨的）。然而为了我们的目的，取式(5.42)作为熵的定义已经是足够了。

变分原理刻划了压力作为所有不变概率测度的一定的表达式

的最大值的特性。为了证明这点，需要下面的关于不变测度的积分表达式。

**引理 5.8**

设 $E$ 是如上的 cookie-cutter 集，设 $\phi: E \to \mathbb{R}$ 是李卜希兹函数，且设 $\mu$ 是 $E$ 上的不变概率测度。那么对任意选取的 $x_i \in X_i$，

$$\int \phi(x)\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i\in I_k} S_k\phi(x_i)\mu(X_i) \tag{5.43}$$

**证明** 首先注意到，如果 $\mu$ 是不变的，那么对任意 $j$，$\int\phi(x)\mathrm{d}\mu = \int\phi(f^j x)\mathrm{d}\mu$（重复应用式(5.25))，所以

$$\int\phi(x)\mathrm{d}\mu = \frac{1}{k}\int\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j x)\mathrm{d}\mu = \frac{1}{k}\int S_k\phi(x)\mathrm{d}\mu \tag{5.44}$$

因此，如果对每个 $i\in I_k$，$x_i \in X_i$，利用有界变差估计式(5.3)和由于 $\mu(E)=1$，通过分割积分区域，即得：

$$\begin{aligned}
&\left|\int\phi(x)\mathrm{d}\mu - \frac{1}{k}\sum_{i\in I_k} S_k\phi(x_i)\mu(X_i)\right| \\
&\quad = \left|\frac{1}{k}\sum_{i\in I_k}\left(\int_{x\in X_i} S_k\phi(x)\mathrm{d}\mu - S_k\phi(x_i)\mu(X_i)\right)\right| \\
&\quad \leqslant \frac{1}{k}\sum_{i\in I_k}\mu(X_i)\max_{x\in X_i}|S_k\phi(x) - S_k\phi(x_i)| \\
&\quad \leqslant \frac{b}{k}
\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$ 即得式(5.43)。□

**定理 5.9（变分原理）**

设 $\phi: E\to\mathbb{R}$ 是李卜希兹函数，则上确界

$$P(\phi) = \sup\{h_\mu + \int\phi\mathrm{d}\mu : \mu \text{ 是 } E \text{ 上的不变概率测度}\}$$

在定理 5.5 中的不变 Gibbs 测度 $\nu$ 处取到。

**证明** 对任意 $i\in I$, 选取 $x_i\in X_i$。对 $k=0,1,2,\cdots$ 和不变概率测度 $\mu$, 利用系 1.5 定义

$$p_k(\mu)\equiv\frac{1}{k}\sum_{i\in I_k}\mu(X_i)[-\log\mu(X_i)+S_k\phi(x_i)] \tag{5.45}$$

$$\leqslant\frac{1}{k}\log\sum_{i\in I_k}\exp S_k\phi(x_i)$$

令 $k\to\infty$, 注意到分别从式(5.42),(5.43) 和(5.5) 可以得到上面这个不等式中三部分的极限，于是

$$h_\mu+\int\phi\mathrm{d}\mu\leqslant P(\phi)$$

为看清定理 5.5 中的不变 Gibbs 测度 $\nu$ 使上式的等号成立，注意到由式(5.36)

$$p_k(\nu)\geqslant\frac{1}{k}\sum_{i\in I_k}\nu(X_i)[-\log(a_0\exp(-kP(\phi)+S_k\phi(x_i)))+S_k\phi(x_i)]$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{i\in I_k}\nu(X_i)[-\log a_0+kP(\phi)]$$

$$=P(\phi)-\frac{1}{k}\log a_0$$

结合式(5.45)(以 $\nu$ 替代 $\mu$) 并令 $k\to\infty$, 再一次利用式(5.42) 和(5.43), 即得 $h_\nu+\int\phi\mathrm{d}\nu\geqslant P(\phi)$。 □

取 $\psi=-s\log|f'|$, 利用定理 5.3, 可以得到关于斥子 $E$ 的豪斯道夫维数的变分公式。即存在唯一的实数 $s$ 使

$$0=\sup\{h_\mu-s\int\log|f'|\mathrm{d}\mu\ :\mu\text{ 是 }E\text{ 上的不变概率测度}\}$$

## 5.5 进一步应用

本章的方法以及 4.2 节的基本有界变分原理，适用于许多其它的动力系统和迭代函数系统。这里列举一些进一步的情形，在

这些情形中，有关的吸引子或斥子支撑着不变的 Gibbs 测度，且满足变分条件，而它的维数可以通过压力求出。

### 弱可微性条件

热力学理论只需在关于 $\phi$ 和 $f$ 的较弱的条件下作少许的修改就能成立。关于有界变差原理，只要 $\phi$ 是以某个 $\varepsilon>0$ 为指数的 Hölder 连续函数就成立（故用以下条件

$$|\phi(x)-\phi(y)|\leqslant a|x-y|^{\varepsilon} \tag{5.46}$$

替代李卜希兹条件(5.1)），见练习 5.1。因此，关于有界畸变原理和维数公式，只要 $f'(x)$ 满足 $\varepsilon$-Hölder 条件就足够了，在这种情况下，称 $f$ 属于可微族 $C^{1+\varepsilon}$。

### 更一般的迭代函数系统

设 $X$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集，$F_1,\cdots F_m$ 是 $C^2$ - 压缩映射(或对某个 $\varepsilon>0$ 的 $C^{1+\varepsilon}$- 压缩)，具有满足 $E=\bigcup_{i=1}^m F_i(E)$ 的非空紧吸引子 $E$。如果 $n=1$ 和选取 $X$ 使得$\{F_i(X)\}_{i=1}^m$ 是不相交的集合，那么将第 4 章和第 5 章分析过程稍作修改就可证明“$m$- 部分 cookie-cutter 集 $E$”是近似自相似的，并且维数可由 $P(-s\log|f'|)=0$ 得出，这里，$P$ 的定义式(5.5)中的和是对整个指标集 $I_k=\{(i_1,\cdots,i_k):1\leqslant i_j\leqslant m\}$ 求的，见图 4.4。

对高维的情形就更复杂了。设 $X$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个“好的”域，例如 $\mathbb{R}^n$ 自身，或者是凸集或具有光滑边界的连通域。如果可微映射 $F:X\to X$ 的导数 $F'(x)$(看作是线性映射)是相似变换，则称 $F$ 是保形的。于是保形映射是“局部相似”的，它将小的区域变换成几乎相似的象。设 $F_1,\cdots F_m: X\to X$ 是内射并是 $C^2$- 保形压缩映射。如果对 $i=1,\cdots,m$, $X_i=F_i(X)$, $X_1,\cdots,X_m$ 是不相交的，我们将这个 IFS 的吸引子 $E$ 看作为函数 $f:X_1\cup\cdots\cup X_m\to X$ 的斥子，并且如果 $x\in X_i$, 则 $f(x)=F_i^{-1}(x)$。这里进行的分析或多

或少与第4、5章中的分析类似，但这里利用了链条法则和中值定理的高维表达式，得出有界变差和畸变原理以及 $E$ 的近似自相似性。$E$ 的维数通过求解 $P(-s\log\|f'\|)=0$ 可以得到，这里 $\|f'\|$ 是导数 $f'$ 的扩张比，$E$ 支撑着一个不变 Gibbs 测度 $\mu$, 且 $\mu(X_I)\asymp|X_I|^s$。

如果 $X_1,\cdots,X_m$ 不是不相交但 $E$ 满足开集条件，IFS 吸引子 $E$ 不总是等同于动力系统的斥子。然而通过对保形映射 $F_1,\cdots F_m$ 而不是对 $f$ 的研究，(即用 $(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k})^{-1}$ 代替 $f^k:X_{i_1,\cdots,i_k}\to X$, 并利用式(4.10) 定义的 $S_k\phi$) 可以用相同的方法得到相应的理论。

## 有向图系统

热力学形式系统中有一个有待处理的由式(3.12)定义的有向图的非线性形式。对 $e\in\mathcal{E}_{i,j}$, 取 $F_e:X_j\to X_i$ 是适当的集合族 $X_1,\cdots X_q\subset\mathbb{R}^n$ 上的 $C^2$-压缩映射，并且得到一族满足式(3.12)的集合 $E_1,\cdots,E_q$。在一定条件下，这些集合的全体也许是以 $F_e$ 为局部逆的某一动力系统 $f$ 的斥子。在 $X_i\subset\mathbb{R}^1$, 或者 $X_i\subset\mathbb{R}^n$ 且 $F_e$ 是保形映射的情形下，热力学形式体系导出了与系3.5的公式 $\rho(A^{(s)})=1$ 中的“压力相似的量”以及 $E_i$ 上的 Gibbs 测度。

## Julia 集

某些复解析函数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 的 Julia 集是一族非常重要的近似自相似集。(注意这里要求 $f$ 是解析的，意味着相应的实函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是保形的。) 那么 $f$ 可能有斥子 $E$, 故存在 $E$ 的一个邻域 $X(E\subset\mathrm{int}(X))$, $f$ 在 $X$ 上是扩张的，此时对 $z\in X$, $|f'(z)|>1$, 且使得 $E=\{z\in X:$ 对任意 $k=1,2,\cdots,f^k(z)\in X\}$。这样的集 $E$ 是 $f$ 的 *Julia* 集。对“大多数”复数 $c$, 函数 $f(z)=z^2+c$ 是这种情形的一个例子，特别当 $|c|$ 较小时，$E$ 同胚于一个圆周，而当 $|c|$ 较大时，$E$ 是完全不连通的，见 FG, 14.3 节。在 $f(z)=z^2+c$, $|c|$ 较大

的这种最简单的情形，可以选取集 $X$ 使得逆 $f^{-1}$ 有两个分支 $F_1, F_2: X \to X$ 都是压缩保形的，见图 5.2。那么 Julia 集 $E$ 是保形 IFS$\{F_1, F_2\}$ 的吸引子。于是 $E$ 是近似自相似的，其豪斯道夫维数和盒维数都可由 $P(-s\log|f'|)=0$ 得出。

对其它解析函数 $f:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, 经常可以找到一个分解 $E = E_1 \cup \cdots \cup E_m$(称为 $E$ 的马尔可夫划分), 及一个元素为 0,1 的矩阵$(\mathcal{E}_{i,j})$,和对 $\mathcal{E}_{i,j}=1$ 定义的函数 $F_{i,j}: E_j \to E_i$, 使得对每个 $i$, 函数 $F_{i,j}$ 是 $E_i$ 附近的 $f^{-1}$ 的一个分支。这本质上是一个保形映射的有向图系统，见图 5.3。如前所述，由热力学理论得出了 Julia 集 $E$ 的维数是 $P(-s\log|f'|)=0$ 的满足 $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$ 的解。

热力学的方法导出了许多 Julia 集的进一步的性质。例如，当 $c$ 较小时，$\dim_H(z^2+c$ 的 Julia 集) 渐近于 $1+|c|^2/4\log 2$, 而对较大的 $c$, 则渐近于 $2\log 2/\log|c|$。这个理论可以延拓到更一般的多项式和其它解析的函数。



图 5.2 $f(z)=z^2+0.5+0.3i$ 的 Julia 集，在由 $f$ 的逆的两个分支所组成的 IFS 下，它是一个自保形集合

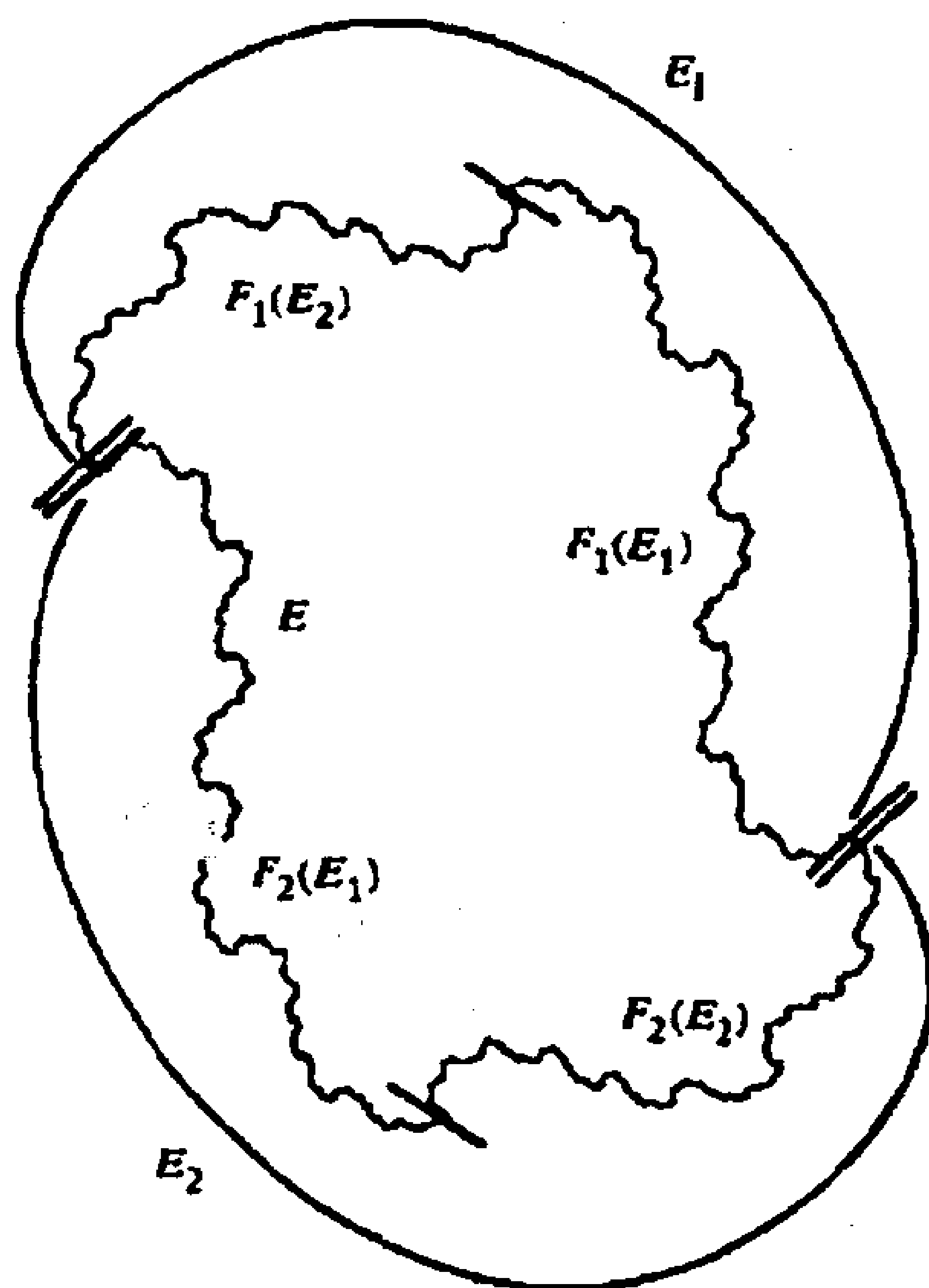



**图 5.3** $f(z)=z^2+0.279+0.3i$ **的** Julia **集** $E$。**这样一个集合利用马尔可夫划分** $E=E_1\cup E_2$ **可以看作是一个有向图集．在以** $F_1$ **和** $F_2$ **作为** $f^{-1}$ **的"东北"和"西南"分支的同时，并有** $E_1=F_1(E_1)\cup F_1(E_2)$ **和** $E_2=F_2(E_1)\cup F_2(E_2)$

## $\mathbb{R}^n$ 上的非保形斥子

虽然在一些特殊情形取得了一些进展，但要将热力学形式体系推广到那些非保形映射上去就不那么容易了。例如，记$S$是把区间[0,1]的端点0和1重迭在一起而形成的圆周，设$f: S\times\mathbb{R}\to S\times\mathbb{R}$是一个保持垂直线的扩张映射，即对适当的$f_1$和$f_2$，有$f(x,y)=(f_1(x),f_2(x,y))$。那么$f$有一条环绕柱面$S\times\mathbb{R}$的斥子曲线。在一定的条件下，这个斥子是可由$P(s\phi_1+\phi_2)=0$得出维数的分形曲线，这里$P$是压力，$\phi_1$和$\phi_2$是涉及$f$在$x$和$y$方向上的扩张比的函数。

对于某些二维区域的微分同胚，在能将映射分解成一个扩张和一个压缩两个分支的局部分解情况下，必然存在一个与压力有关的，并给出所发生的不变的马蹄形吸引子的维数的公式。

对不能分解成"独立"方向形式的函数 $f$，如图 5.4 的例子，这种情形是相当复杂。有关维数公式方面已经取得了一定的进展，在 12.1 节中概述了一种能导出维数上界的方法。

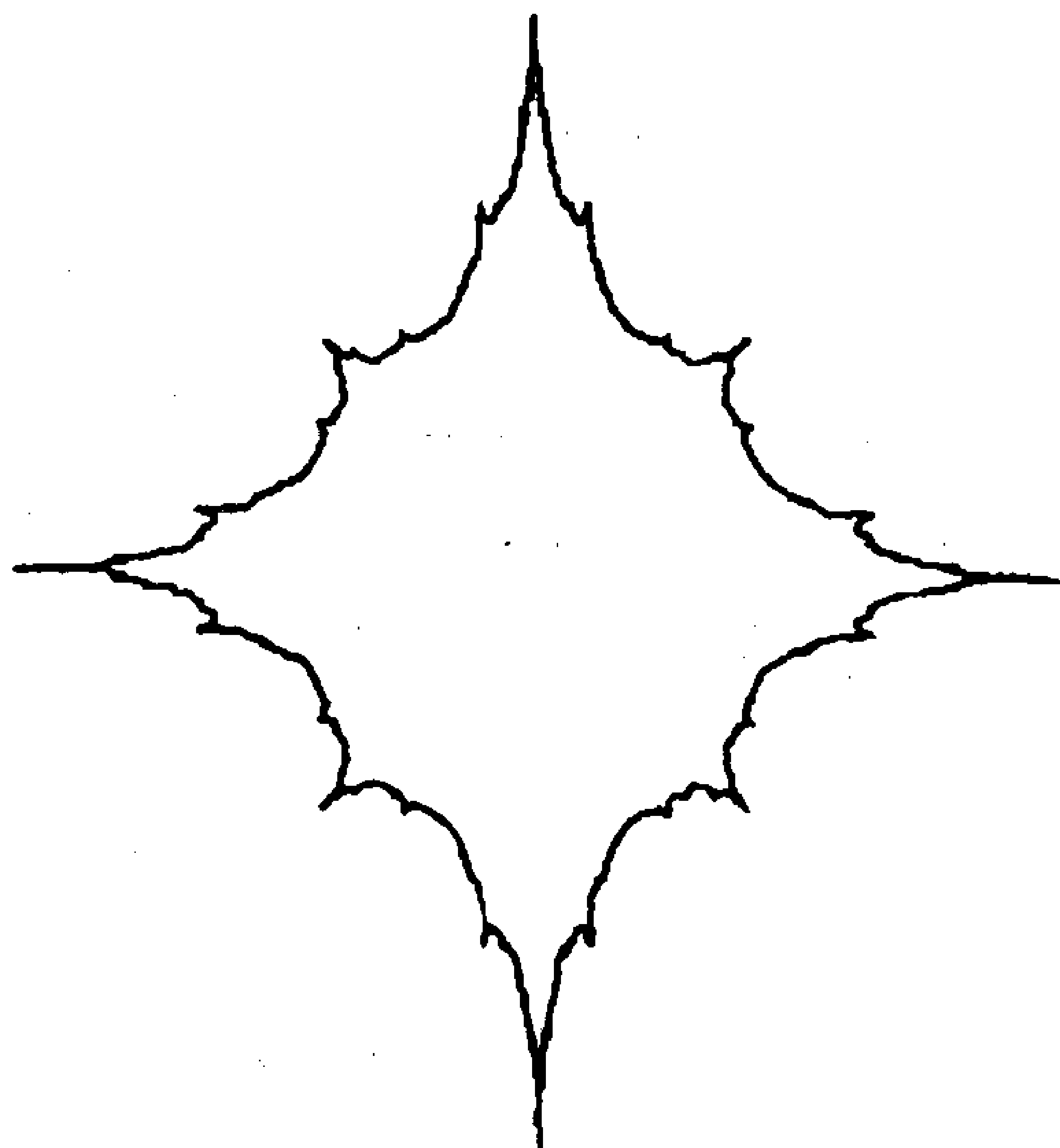


**图 5.4 非保形映射：$(x,y)\to(x^2-y^2,\ 6xy)$ 的斥子**

## 5.6 为什么称为"热力学"形式体系

在涉及动力系统时，数学家们经常要问的问题是：为什么给这种方法冠以"热力学"的名字？尽管有关的内容不是物理形式，但是许多思想，如 Gibbs 测度的存在性首先是从统计力学中发展起来的，许多年以后才被移植到动力系统中去。

为简单起见，考虑一维的粒子链，这些粒子只位于整数点 $(1,2,3,\cdots,k)$ 上。每个粒子只位于两个可能的位置之一，分别用 1 和 2 标记（见图 5.5），于是系统的组态可以用 $k$ 个数组成的序列确

定 $\mathbf{i}=(i_1,\cdots,i_k)$，其中对 $j=1,\cdots,k$，$i_j=1$ 或 2。每个组态具有相应的能量，记为 $E_{i_1,\cdots,i_k}$，并且对每个实数 $s$，定义划分函数

$$Z_k^s=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\exp(-sE_{i_1,\cdots,i_k})$$

其中求和是对全部 $2^k$ 个可能的组态进行的。

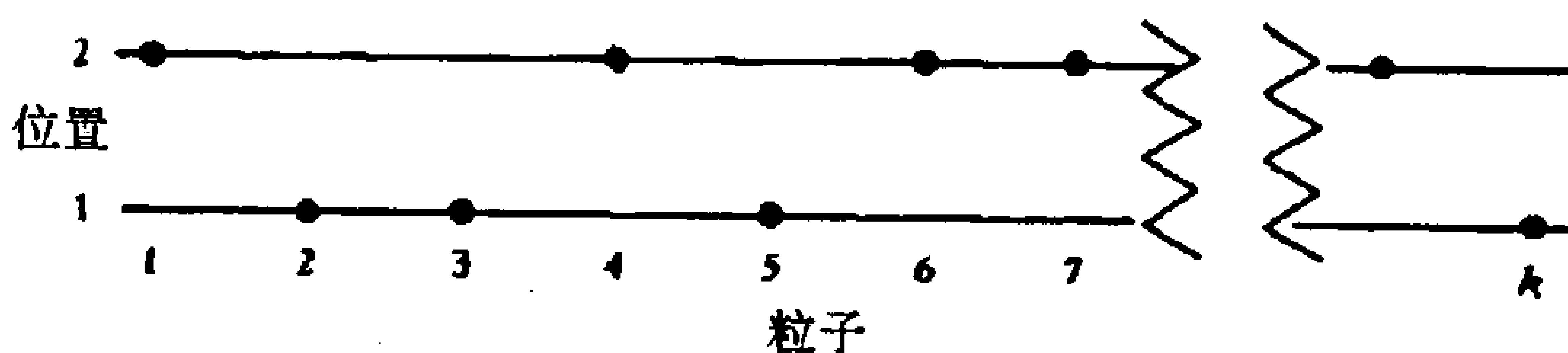



图 5.5 具有能量 $E_{i_1,\cdots,i_k}$ 和与 $\exp(-sE_{i_1,\cdots,i_k})$ 成比例的发生概率的粒子系统的组态 $(i_1,\cdots,i_k)$。

当粒子的数目充分大的时候，粒子在这个过程中有相互作用并进行能量交换。支配这种交互作用的基本原则是波尔兹曼定律，即在特定组态下，系统的小部分的概率与这个组态的能量的幂成比例，即对实数 s

$$\text{组态}(i_1,\cdots,i_k)\text{的概率}=\frac{\exp(-sE_{i_1,\cdots,i_k})}{Z_k^s}$$

其中 $s$ 可以看成是系统的绝对温度的倒数(乘以波尔兹曼常数)。

在最简单的情形，每个粒子的能量仅依赖于它自己的状态，所以 $E_{i_1,\cdots,i_k}$ 是这些粒子各自能量的和。于是，记 $\phi(i_1,\cdots,i_k)$ 为第一个粒子具有的能量（只依赖于 $i_1$），$f$ 为"漂移" $f(i_1,i_2,\cdots,i_k)=(i_2,\cdots,i_k,j_1)$，其中 $j_1$ 是任意选取的，则

$$E_{i_1\cdots i_k}=\phi(\mathbf{i})+\phi(f(\mathbf{i}))+\cdots+\phi(f^{k-1}(\mathbf{i}))\equiv S_k\phi(\mathbf{i})$$

于是

$$Z_k^s=\sum_{\mathbf{i}\in I_k}\exp(-sS_k\phi(\mathbf{i}))$$

而对 $\boldsymbol{i}\in I_k$,

$$组态(\boldsymbol{i})的概率 = \frac{\exp(-sS_k\phi(\boldsymbol{i}))}{Z_k^s}$$

如果允许粒子链为无穷，令 $k\to\infty$, 这就是所谓的取热力学极限。只要能量满足一定的合理的物理条件，例如某种形式的平移不变性，那么利用平行于建立有界变差原理和动力系统的 Gibbs 测度的存在性的论证可以说明：

$$Z_k^s \asymp \exp(kP_s)$$

以及对任意有限的序列 $\boldsymbol{i}=(i_1,\cdots,i_k)$,

组态$(j_1,j_2,\cdots)$(其中 $j_1=i_1,\cdots,j_k=i_k$) 发生的概率

$$\asymp \exp(-sS_k\phi(\boldsymbol{i})-kP_s)$$

其中数 $P_s$ 是物理系统的压力，这个概率是有关状态的典型 Gibbs 分布。

与上面叙述平行的，出现在 cookie-cutter 动力系统中的公式和关系现在也很清楚。在这方面有如下的对应：

| 统计力学 | 动力系统 |
|---|---|
| 有限粒子组态 | 区间 $X_{\boldsymbol{i}}$ |
| 无限粒子组态 | $E$ 的点 |
| 能量 $E_{\boldsymbol{i}}$ | $S_k\phi(x)$ |
| 温度的倒数 | 维数 |
| 划分函数 | 和 $\sum_{\boldsymbol{i}\in I_k}\exp(S_k\phi(x_{\boldsymbol{i}}))$ |
| 压力 | 拓扑压力 |
| 组态上的 Gibbs 分布 | $E$ 上的 Gibbs 测度 |

虽然说“斥子的维数是当压力为零时温度的倒数”，可能是不适宜的，但是，动力系统的许多特征最好是用统计力学中的一些平等概念来研究。

## 5.7 注记与参考文献

关于热力学方法可以被应用于动力系统的这个引人注意的见解由 Sinai(1972) 首先提出的，以后被 Bowen(1975) 和 Ruelle (1978) 进一步发展。后两本书给出了很有技巧性的叙述，正如 Parry 和 Pollicott(1990)所做的一样，他们利用 $\zeta$ 函数去研究连续系统的周期轨道而推广了这方面的工作。Bedford (1991)给出了这个材料的很好的综述，与此相关的各种综述性的文章均已包括在 Bedford 等人(1991) 的书中。关于定理 5.4 证明中用到的函数解析性质可参见 Dunford 和 Schwartz(1958) 的书。

Ruelle(1982) 的书处理了与 Julia 集相关的 $\mathbb{R}^n$ 区域上的保形映射的特别情形。Bedford (1986) 和 Mauldin 以及 Williams (1988) 分析了有向图或递归的 IFS, Bedford 和 Urbanski(1990) 研究了保存垂直线的映射。McClusky 和 Manning(1983) 得到了关于马蹄形吸引子的公式，Falconer(1994) 考虑了一般非保形斥子情形。

### 练习

5.1 证明命题 4.1 的有界变差原理，其中李卜希兹条件(4.8) 用 $\varepsilon$-Hölder 条件(5.46) 代替。

5.2 验证式(5.24) 给出了关于在压力的定义中收敛速率的界。

5.3 设 $f: X_1 \cup X_2 \to X$ 是通常形式的 cookie-cutter 系统，即 $f$ 是 $E$ 上的 $2-1$ 函数。证明如果 $\mu$ 是 $E$ 上的任意不变的概率测度，则 $h_\mu \leqslant \log 2$, 且总可以找到 $\mu$, 使 $h_\mu = \log 2$.

5.4 考虑使 $f(x) = 3x(\mathrm{mod}\,1)$ 的式(2.24) 的系统，$E$ 是三分康托集。对任意实数 $s$, 找出 $P(-s\log|f'|)$。设 $\mu$ 是 $E$ 上的"均匀分布"概率测度(即如果 $i \in I_k$, 则 $\mu(z_i) = 2^{-k}$)。求出 $h_\mu$ 并直接验证当 $\phi = -s\log|f'|$ 时，$h_\mu + \int \phi \mathrm{d}\mu = P(\phi)$.

5.5 证明由式(5.15) 给出的 $P(-s\log|f'|)$ 是 $s$ 的凸函数。

# 第 6 章　遍历定理与分形

遍历定理是概率论及动力系统中最基本的和最有用的结果之一。在这一章中，证明了遍历定理并说明它可以应用到分形几何的研究中，特别是有关分形的局部性质，比如密度和平均密度。而遍历定理的其它应用可以在本书的后面部分遇到。

## 6.1 遍历定理

对遍历定理设定的条件如下：集合 $X$，其上的映射 $f: X \to X$，及 $X$ 上的有限测度 $\mu$。且设任意可测集 $A \subset X$ 的逆象 $f^{-1}(A)$ 是可测的，以及

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) \tag{6.1}$$

即 $\mu$ 在 $f$ 下是不变的，或者说 $f$ 对 $\mu$ 是保测的。条件(6.1)等价于对任意可测函数 $g: X \to \mathbb{R}$，

$$\int g(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int g(f(x))\mathrm{d}\mu \tag{6.2}$$

下面总是假设 $\mu$ 是波雷尔规则测度，所以式(6.1)与式(6.2)对所有连续函数 $g: X \to \mathbb{R}$ 成立是等价的。

回顾一下，称测度 $\mu$ 对 $f$ 是遍历的，如果对任意使 $A = f^{-1}(A)$ 的可测集 $A$，$\mu(A) = 0$ 或者 $\mu(X \backslash A) = 0$。本质上，这意味着这个系统是不可分的：即如果集 $A$ 满足 $A = f^{-1}(A)$ 及 $0 < \mu(A) < \mu(X)$，则可以分别考虑把 $f$ 限制在 $A$ 和 $X \backslash A$ 的两个独立系统。

如果 $\mu$ 是遍历的，且 $\phi: X \to \mathbb{R}$ 是对任意 $x$ 满足 $\phi(x) = \phi(f(x))$ 的可测函数，则对几乎所有的 $x$，存在数 $\lambda$ 使，

$$\phi(x) = \lambda \tag{6.3}$$

为看清这点，注意到对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，集 $A = \{x \in X: \phi(x) < \lambda\}$ 是可测

的，且满足 $f^{-1}(A)=A$，故由遍历性，或者 $\mu(A)=0$，或者 $\mu(X\backslash A)=0$，这就是或者对几乎所有的 $x$，$\phi(x)<\lambda$，或者对几乎所有的 $x$，$\phi(x)\geqslant\lambda$。

把 $f: X\to X$ 看成是动力系统，如果时刻 0 时粒子的位置是 $x$，则 $k$ 次迭代 $f^k x$ 表示时刻 $k$ 时粒子的位置。对 $\phi: X\to\mathbb{R}$，把 $\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j x)$ 看成是 $x$ 的前 $k$ 次迭代所计算出的 $\phi$ 的时间平均。遍历定理断言，对几乎所有的 $x$，当 $k\to\infty$ 时这些平均值趋于一个极限。而且，如果 $\mu$ 是遍历的，这个极限不依赖于 $x$，且等于 $\phi$ 的空间平均，即等于 $\int_X\phi(y)\mathrm{d}\mu(y)$。于是，在遍历的情形下，对几乎所有的初始点 $x$，$\phi$ 的时间平均等于 $\phi$ 的空间平均。

**定理 6.1（遍历定理）**

设 $f: X\to X$，$\mu$ 是在 $f$ 下不变的 $X$ 上的有限测度，又设 $\phi\in L^1(\mu)$，则对 $\mu$-几乎所有的 $x$，极限

$$\Phi(x)\equiv\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j x) \tag{6.4}$$

存在，如果 $\mu$ 是遍历的，则对 $\mu$-几乎所有的 $x$，

$$\Phi(x)=\frac{1}{\mu(X)}\int_X\phi(y)\mathrm{d}\mu(y) \tag{6.5}$$

**证明** 为简单起见，只对存在 $M$，使对任意 $x\in X$，$|\phi(x)|\leqslant M$ 的情况证明定理，而对推广到 $\phi\in L^1(x)$ 的情形，参见练习 6.1。

记

$$\alpha_k(x)=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j x) \tag{6.6}$$

为关于前 $k$ 次迭代的 $\phi$ 的平均，并记

$$\overline{\alpha}(x)=\limsup_{k\to\infty}\alpha_k(x)$$

证明的关键是说明，对任意 $\varepsilon>0$，下式成立

$$\int\overline{\alpha}(x)\mathrm{d}\mu(x)\leqslant\int\phi(x)\mathrm{d}\mu(x)+\varepsilon \tag{6.7}$$

为验证上式，定义

$$\tau(x)=\min\{k>0:\alpha_k(x)\geqslant\overline{\alpha}(x)-\varepsilon\}$$

则由$\overline{\alpha}$的定义，可知对任意 $x$, $\tau(x)<\infty$。如果存在 $T<\infty$, 使对任意 $x$, $\tau(x)\leqslant T$, 则和式(6.6)可以分割成每段长度最多为 $T$ 的一些部分，使每部分的 $\phi(f^j x)$ 关于 $j$ 的平均值最小为$\overline{\alpha}(x)-\varepsilon$。更确切地说，对每个 $x$, 用归纳法定义序列$(k_1,k_2,\cdots)$, 即取 $k_1=\tau(x)$, 而对 $i=2,3,\cdots$, $k_i=\tau(f^{k_1+\cdots+k_{i-1}}x)$, 使得

$$\begin{aligned}\sum_{j=k_1+\cdots+k_{i-1}}^{k_1+\cdots+k_i-1}\phi(f^j x)&=k_i\alpha_{k_i}(f^{k_1+\cdots+k_{i-1}}x)\\&\geqslant k_i(\overline{\alpha}(f^{k_1+\cdots+k_{i-1}}x)-\varepsilon)\\&=k_i(\overline{\alpha}(x)-\varepsilon)\end{aligned}\tag{6.8}$$

上面最后一步的等号是因为对所有的 $k$, $\overline{\alpha}(x)=\overline{\alpha}(f^k x)$。对所有的 $i$ 求和，则只要 $k$ 具有 $k_1+\cdots+k_i$ 的形式，就可得

$$\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j x)\geqslant k(\overline{\alpha}(x)-\varepsilon)$$

对任意的整数 $k$, 取 $i$ 为使 $k_1+\cdots+k_i\leqslant k$ 的最大的正整数，并把和 $\sum\limits_{j=0}^{k-1}\phi(f^j x)$ 与 $\sum\limits_{j=0}^{k_1+\cdots+k_i}\phi(f^j x)$ 比较，因为 $0<k-(k_1+\cdots+k_i)\leqslant T$, 所以可得

$$\sum_{j=0}^{k-1}\phi(f^j x)\geqslant(k-T)(\overline{\alpha}(x)-\varepsilon)-TM$$

对上式两边同时积分(注意到由式(6.2), $\int\phi(f^j x)\mathrm{d}\mu(x)=\int\phi(x)\mathrm{d}\mu(x)$), 同除 $k$ 并令 $k\to\infty$, 即知在此情形下，式(6.7)成立。

现在设 $\tau(x)$ 是无界的，可选择 $T$ 充分大，使 $\mu(A)<\varepsilon$, 这里 $A\equiv\{x:\tau(x)>T\}$。在 $A$ 上修改 $\phi$ 的定义成 $\phi^*:X\to\mathbb{R}$ 使

$$\phi^*(x)=\begin{cases}\phi(x) & (x\notin A)\\ M & (x\in A)\end{cases}$$

在式(6.6)中用 $\phi^*$ 代替 $\phi$ 定义 $\alpha_k^*$，令

$$\tau^*(x)=\min\{k>0:\ \alpha_k^*(x)\geqslant\overline{\alpha}(x)-\varepsilon\}$$

即知对任意 $x$，$\tau^*(x)\leqslant T$(因为对任意 $x\in A$，$\tau^*(x)=1$)。重复上面的过程，可得

$$\begin{aligned}\int\overline{\alpha}(x)\mathrm{d}\mu(x)&\leqslant\int\phi^*(x)\mathrm{d}\mu(x)+\varepsilon\\&=\int\phi(x)\mathrm{d}\mu(x)+\int(\phi^*(x)-\phi(x))\mathrm{d}\mu(x)+\varepsilon\\&\leqslant\int\phi(x)\mathrm{d}\mu(x)+2M\varepsilon+\varepsilon\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon$ 可以选择的任意小，所以式(6.7)成立。

由于 $\varepsilon$ 是任意的，式(6.7)意味着 $\int\overline{\alpha}(x)\mathrm{d}\mu(x)\leqslant\int\phi(x)\mathrm{d}\mu(x)$。利用对称的论述同样可以得到，

$$\int\phi(x)\mathrm{d}\mu(x)\leqslant\int\underline{\alpha}(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

其中 $\underline{\alpha}(x)=\liminf\limits_{k\to\infty}\alpha_k(x)$。联合这些不等式，就有 $\int(\overline{\alpha}(x)-\underline{\alpha}(x))\mathrm{d}\mu(x)\leqslant 0$。由于 $0\leqslant\overline{\alpha}(x)-\underline{\alpha}(x)$，这意味着对几乎所有的 $x$，$\underline{\alpha}(x)=\overline{\alpha}(x)$，所以这共同的值等于极限(6.4)。

显然，$\alpha_k(fx)-\alpha_k(x)=(\phi(f^kx)-\phi(x))/k$，所以只要极限存在，$\Phi(f(x)=\Phi(x)$。于是如果 $\mu$ 是遍历的，式(6.3)意味着对几乎所有的 $x$，存在 $\lambda$ 使 $\Phi(x)=\lambda$ 成立。利用控制收敛定理及 $\mu$ 的不变性，

$$\lambda\mu(X)=\int\Phi(x)\mathrm{d}\mu(x)=\lim_{k\to\infty}\int\alpha_k(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int\phi(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

即式(6.5)成立。 □

然而，遍历定理的这个形式只适合于对自相似集的应用。为了研究非线性的 cookie-cutter 集，还需要下面的可称为“近似的

遍历定理"的遍历定理的推广形式。

**系 6.2**

$f: X \to X$, 设 $\mu$ 是 $X$ 上的有限不变测度，对 $n=1,2,\cdots$, $\phi_n \in L^1(\mu)$。设对任意的正数 $k$ 和 $n$, 以及任意 $x \in X$,

$$|\phi_n(f^k x) - \phi_{n+k}(x)| < \varepsilon_n \tag{6.9}$$

其中 $\varepsilon_n \searrow 0$ 。则对 $\mu$-几乎所有的 $x$, 极限 $\Phi(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \phi_k(x)$ 存在。如果 $\mu$ 是遍历的，则 $\Phi(x)$ 几乎处处是常数。

**证明** 对 $m \geqslant 1$ 及 $n \geqslant 1$, 成立恒等式

$$\frac{1}{m+n}\sum_{k=0}^{m+n-1} \phi_k(x) = \frac{1}{m+n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(x) \tag{6.10}$$

$$+ \frac{1}{m+n}\sum_{k=0}^{m-1} [\phi_{n+k}(x) - \phi_n(f^k x)] \tag{6.11}$$

$$+ \frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \phi_n(f^k x) \tag{6.12}$$

固定 $n$, 令 $m \to \infty$, 对几乎所有的 $x$, 式(6.10)收敛到零，式 (6.11) 的模小于 $\varepsilon_n$, 而利用定理 6.1, 式(6.12)对几乎所有的 $x$ 收敛于一个数，记为 $\Phi_n^*(x)$。于是对几乎所有的 $x$

$$\Phi_n^*(x) - \varepsilon_n \leqslant \liminf_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \phi_k(x)$$

$$\leqslant \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \phi_k(x) \leqslant \Phi_n^*(x) + \varepsilon_n$$

令 $n \to \infty$, 则对几乎所有的 $x$,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \phi_k(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n^*(x) \equiv \Phi(x)$$

如果 $\mu$ 是遍历的，则由定理 6.1, $\Phi_n^*$ 几乎处处是常数，所以 $\Phi$ 也几乎处处是常数。 □

遍历定理的一个简单的应用涉及动力系统的李雅普洛夫指数。设 $X\subset\mathbb{R}$ 是闭区间，而 $f: X\to X$ 是 $C^1$ 映射，李雅普洛夫指数反映了在迭代 $f$ 之下扩张或压缩的局部速度。定义 $f$ 在 $x$ 的李雅普洛夫或特征指数 $\lambda(x)$ 为：

$$\lambda(x)\equiv\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log|(f^k)'(x)| \tag{6.13}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\log|f'(f^jx)| \tag{6.14}$$

式(6.14)用到了式(4.16)的链条法则。于是对中心在 $x$ 的较小的区间 $J$, $|f^k(J)|\simeq\exp(k\lambda(x))|J|$。当然，这个定义假设了极限(6.13)存在；在合理的条件下，这可以从遍历定理得出。

**命题 6.3**

设 $\mu$ 是对 $C^1$ 映射 $f:X\to X$ 的不变遍历测度，又设 $\int\log|f'(x)|\mathrm{d}\mu(x)>-\infty$。则对 $\mu$-几乎所有的 $x$, 存在数 $\lambda$, 使李雅普洛夫指数 $\lambda(x)$ 存在且等于 $\lambda$。

**证明** 在定理 6.1 中取 $\phi(x)=\log|f'(x)|$ 即得结论。□

在上述条件下，把 $\lambda$ 看成是 $f$ 的李雅普洛夫指数。

李雅普洛夫指数可以推广到可微映射 $f:X\to X$ 上，其中 $X$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的合适的子集。导数 $(f^k)'(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子，并记 $a_1^k(x)\geqslant a_2^k(x)\geqslant\cdots\geqslant a_n^k(x)$ 为椭圆 $(f^k)'(B)$ 的主半轴的长度，其中 $B$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球。李雅普洛夫指数定义为随 $k$ 增长的这些主半轴长度的对数速度：

$$\lambda_j(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log a_j^k(x)\qquad(j=1,\cdots,n)$$

于是，李雅普洛夫指数描述了在迭代 $f$ 之下无穷小球的形变。利用遍历定理的一个更加复杂的版本，可以证明，如果 $\mu$ 关于 $f$ 是

不变的且是遍历的，则对 $\mu$ 几乎所有的 $x$ 和对所有的 $j$，存在数 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$，使 $\lambda_j(x)=\lambda_j$。

## 6.2 密度与平均密度

自相似集和 cookie-cutter 集支撑的自然测度，关于这些集定义的变换是不变和遍历的。正因为如此，使得遍历定理是研究它们的有用的工具。下面先概述一下这些测度的性质。

**引理 6.4**

(a) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是满足强分离条件（见 2.2 节）的自相似 IFS 的维数为 $s$ 的吸引子。而 $\mu=\mathcal{H}^s|_E$ 是 $s$ 维豪斯道夫测度 $\mathcal{H}^s$ 在 $E$ 上的限制。则 $\mu$ 关于 $f:E \to E$ 是不变的且是遍历的。（其中 $f$ 是式(2.41) 给出的逆映射）。

(b) 更一般的，设 $E$ 是由式(2.43)－(2.44) 给出的自相似集，且满足强分离条件。而 $\mu$ 是 $E$ 上的自相似测度，则 $\mu$ 关于 $f:E \to E$ 是不变的和遍历的。

(c) 以维数为 $s$ 的 cookie-cutter 集 $E$ 为支撑的不变遍历概率测度 $\mu$ 与 $\mathcal{H}^s|_E$ 等价。

**证明** 利用通常的 IFS 的记号（见 2.2 节），对 $A \subset E$

$$f^{-1}(A)=\bigcup_{i=1}^{m} F_i(A)$$

是不交并。利用 $\mathcal{H}^s$ 的，因此也是 $\mu$ 的比例性质(2.13)，并利用式(2.42)

$$\mu(f^{-1}(A))=\sum_{i=1}^{m}\mu(F_i(A))=\sum_{i=1}^{m} r_i^s \mu(A)=\mu(A)$$

所以 $\mu$ 在 $f$ 之下是不变的。

现在，设 $A \subset E$ 是可测的且 $A=f^{-1}(A)$，故对任意 $k$ 和 $\boldsymbol{i}=(i_1,\cdots,i_k)$，$A=f^{-k}(A)=\bigcup_{\boldsymbol{i} \in I_k} F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(A)$，则 $A \cap E_{i_1,\cdots,i_k}=F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(A)$，并利用比例性质：

$$\mu(A\cap E_i)=(r_{i_1}\cdots r_{i_k})^s\mu(A)=\mu(E_i)\mu(E)^{-1}\mu(A)$$

设 $C$ 是由满足

$$\mu(A\cap U)=\mu(U)\mu(A)\mu(E)^{-1} \tag{6.15}$$

的集 $U\subset E$ 组成的集类。上面已经证明了任意 $i\in I_k$, $E_i\in C$, 由可加性知，这样的集合任意可数并也属于 $C$。由 $\mu$ 的规则性，对任意给定的可测集 $U\subset E$, 可以找到下降到 $U$ 的这样的集序列，所以式(6.15) 对任意的这样的集合$U$成立。特别取 $U=A$, 即有

$\mu(A)=\mu(A\cap A)=\mu(A)\mu(A)\mu(E)^{-1}$, 即得

$\mu(A)=0$ 或 $\mu(A)=\mu(E)$, 所以 $\mu$ 是遍历的。

(b) 注意到对任意 $A\subset E$, 形式为 $\mu(F_i(A))=p_i\mu(A)$ 的比例性质成立，则(b) 的证明与(a)的证明类似，只是把其中的 $r_i^s$ 由 $p_i$代替。

(c) 这个(a) 的非线性的类似结论已在第 5 章中证明：定理 5.3 表明了 $\mathcal{H}^s$ 在 $E$ 的限制是 Gibbs 测度，定理 5.5 表明存在等价的不变 Gibbs 测度，而系 5.6 则说明这些测度是遍历的。 □

由引理 6.4(c) 可得出 cookie-cutter 系统的李雅普洛夫指数存在，且在 $E$ 上 $\mathcal{H}^s$- 几乎处处是常数。

下面对某些分形的密度考虑遍历性的一些推论。设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是满足 $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$, 且豪斯道夫维数为 $s$ 的波雷尔集，而且，为方便起见，记 $\mu=\mathcal{H}^s|_E$ 为 $s$ 维豪斯道夫测度在 $E$ 上的限制，即

$$\mu(A)=\mathcal{H}^s(E\cap A) \tag{6.16}$$

回顾式(2.17) - (2.18),( 也可见 FG 第 5 章 ),$E$ 在 $x$ 的($s$ 维 )下、上密度是定义为

$$\begin{aligned}\underline{D}^s(x)=\underline{D}^s(E,x)&=\liminf_{r\to 0}\mathcal{H}^s(E\cap B(x,r))/(2r)^s\\&=\liminf_{r\to 0}\mu(B(x,r))/(2r)^s\end{aligned} \tag{6.17}$$

及

$$\begin{aligned}\overline{D}^s(x)=\overline{D}^s(E,x)&=\limsup_{r\to 0}\mathcal{H}^s(E\cap B(x,r))/(2r)^s\\&=\limsup_{r\to 0}\mu(B(x,r))/(2r)^s\end{aligned} \tag{6.18}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$，这些密度表明集 $E$ 在 $x$ 点周围集中的程度。显然，对任意 $x$，$\underline{D}^s(x)\leqslant\overline{D}^s(x)$，但是对不规则的“分形”集，对 $\mu$- 几乎所有的 $x\in E$，这个不等式严格成立(见 2.1 节)。然而，作为遍历性的一个直接推论是，在自相似集和 cookie-cutter 集的情形，下密度和上密度几乎处处是常数。

**命题 6.5**

设 $E$ 或者是满足强分离条件的自相似集，或者是 cookie-cutter 集，且 $s=\dim_H E$。则存在常数 $\underline{d}$ 和 $\overline{d}$，满足 $0<\underline{d}\leqslant\overline{d}\leqslant 1$，使对 $\mathcal{H}^s$- 几乎所有的 $x\in E$，

$$\underline{D}^s(x)=\underline{d} \qquad 及 \qquad \overline{D}^s(x)=\overline{d}$$

**证明** 设 $f:X\to X$ 是定义自相似集或 cookie-cutter 集 $E$ 的函数，设 $X$ 是使 $E$ 在其内部的集合，则由式(2.19)，对任意 $x\in E$，$\underline{D}^s(x)=\underline{D}^s(f(x))$。

利用引理 6.4(a) 或(c)，存在遍历测度 $\mu$ 等价于 $\mathcal{H}^s$ 在 $E$ 上的限制。因为$\underline{D}^s$ 是 $x$ 的可测函数(见练习 6.4)，由式(6.3) 知$\underline{D}^s(x)$ 对$\mu$- 几乎处处是常数，因此对$\mathcal{H}^s$- 几乎所有的$x\in E$，$\underline{D}^s(x)$ 是常数。类似的论述也可以应用到 $\overline{D}^s(x)$上。

注意到对任意 $x$，$0<\underline{D}^s(x)$(见式(5.22)) 及对 $\mathcal{H}^s$-几乎所有的 $x$，$\overline{D}^s(x)\leqslant 1$(其实对所有 $x$ 都成立，见 FG 命题 5.1)，所以 $0<\underline{d}\leqslant\overline{d}\leqslant 1$ □

有关密度的一个经典结果(FG5.1 节)指出，如果 $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$，且 $s$ 是非整数，则对 $\mathcal{H}^s$-几乎所有的 $x$，$\underline{D}^s(x)<\overline{D}^s(x)$，即密度不存在，所以在命题 6.5 中 $\underline{d}<\overline{d}$。这意味着当 $r$ 充分小时，比值

$$\mu(B(x,r))/(2r)^s=\mathcal{H}^s(E\cap B(x,r))/(2r)^s \tag{6.19}$$

或多或少在 $\underline{d}$ 与 $\overline{d}$ 之间“振荡”。很自然人们要试图去描述这个

振荡，特别地，对充分小的 $r$ 去寻找式(6.19) 的"平均"值。因为自相似集在一个以几何速率趋于 0 的比例下显示了自相似性(例如，三分康托集具有的自相似性的比是 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{27}$ …)，所以利用这样一种平均的形式是合适的，它赋予如此比例的每一步骤以相等的量。

因此，下面引进对数平均

$$A^s(x,T) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\mu(B(x,e^{-t}))(2e^{-t})^{-s}dt$$

$$= 2^{-s}\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\mu(B(x,e^{-t}))e^{st}dt \tag{6.20}$$

定义 $E$ 或 $\mu$ 在 $x$ 的下、上平均密度为

$$\underline{A}^s(x) = \liminf_{T\to\infty} A^s(x,T)$$

及

$$\overline{A}^s(x) = \limsup_{T\to\infty}\ A^s(x,T)$$

如果 $\underline{A}^s(x)=\overline{A}^s(x)$，则称这个共同值为平均密度或二阶密度，并用 $A^s(x)$ 表示，则

$$A^s(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\frac{\mu(B(x,e^{-t}))}{(2e^{-t})^s}\ dt \tag{6.21}$$

(当然，这些平均密度可以对更一般的测度 $\mu$ 定义，而不仅仅只是限制在豪斯道夫测度。)

易见，对任意 $x$

$$\underline{D}^s(x)\leqslant\underline{A}^s(x)\leqslant\overline{A}^s(x)\leqslant\overline{D}^s(x) \tag{6.22}$$

对任意 $r>0$，密度及平均密度是由 $\mu$ 在 $B(x,r)$ 上的限制所确定，即它们只是局部的定义，因此，它们反映了 $E$ 在 $x$ 的局部结构。

我们已经注意到，对一个分形集 $E$，密度 $D^s(x)$ 一般不存在。然而，对许多分形，包括自相似集和 cookie-cutter 集，平均密度 $A^s(x)$ 确实存在，且在几乎所有的 $x$ 上取相同的值。可以利用遍历定理证明这个事实，首先在特别简单的假设下，即 $E$ 是三分康

托集的情形说明这个方法。

**定理 6.6**

设 $E$ 是三分康托集，$s=\log 2/\log 3$, 设 $\mu=\mathcal{H}^s|_E$（即 $E$ 上的自然均匀分布的测度）。则对 $\mu$-几乎所有的 $x\in E$, 平均密度 $A^s(x)$ 存在，且

$$A^s(x)=\frac{1}{2^s\log 2}\iint_{|x-y|\geqslant\frac{1}{3}}|x-y|^{-s}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)=0.62344\cdots \quad (6.23)$$

**证明** 对 $k=0,1,2,\cdots$, 记

$$\phi_k(x)=\int_{t=k}^{k+1}\frac{\mu(B(x,3^{-t}))}{2^{-t}}\,\mathrm{d}t \quad (6.24)$$

(当然在此种情况下, $B(x,r)$ 正好是区间 $[x-r,\ x+r]$) 设 $f:E\to E$ 是由 $f(x)=3x(\mathrm{mod}\,1)$ 给出，则 $f$ 以自然的方式反映了 $E$ 的自相似性(对 $r\leqslant\frac{1}{3}$,"像" $f(E\cap B(x,r))$ 恰好是 $E\cap B(x,r)$ 扩大三倍)。利用这一点及 $\mu$ 的比例性质，注意到如果用 $f(x)$ 代替 $x$, $t-1$ 代替 $t$, 式(6.24) 的被积式中恰好是分子分母同时扩大 2 倍。于是 $\phi_k(x)=\phi_{k-1}(f(x))$, 并且对 $f$ 的迭代

$$\phi_k(x)=\phi_{k-1}(fx)=\phi_{k-2}(f^2x)=\cdots=\phi_0(f^kx)$$

因为 $\mu$ 对 $f$ 是不变且遍历的(由引理 6.4(a) 或直接验证), 所以由遍历定理 6.1, 对 $\mu$-几乎所有的 $x\in E$, 利用式(6.24),

$$\int_E\phi_0(y)\mathrm{d}\mu(y)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\phi_0(f^jx)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\phi_j(x)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int_{t=0}^{k}\frac{\mu(B(x,3^{-t}))}{2^{-t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2^s \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \frac{\mu(B(x,\mathrm{e}^{-t}))}{(2\mathrm{e}^{-t})^s}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2^s A^s(x)$$

这其中由于积分的有界性使我们能从离散的极限过渡到连续的极限。于是对 $\mu$-几乎所有的 $x$, 平均密度 $A^s(x)$ 存在且等于 $a$, 这里

$$a = 2^{-s}\int_E \phi_0(y)\mathrm{d}\mu(y)$$

把 $a$ 表成式(6.23) 的形式是方便的，代入式(6.24)，并记 $1_X$ 为集 $X$ 的示性函数，则

$$2^s a = \int_E \int_{t=0}^{1} 2^t \mu(B(x,3^{-t}))\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \int_E \int_{t=0}^{1} \int_E 2^t 1_{\{|x-y|\leqslant 3^{-t}\}}\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \int_E \int_E \int_{t=0}^{\min\{1,-\log|x-y|/\log 3\}} \mathrm{e}^{t\log 2}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

$$= \frac{1}{\log 2} \iint\limits_{|x-y|<\frac{1}{3}} 1\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)$$

$$+ \frac{1}{\log 2} \iint\limits_{|x-y|\geqslant\frac{1}{3}} (|x-y|^{-s}-1)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)$$

$$= \frac{1}{\log 2} \iint\limits_{|x-y|\geqslant\frac{1}{3}} |x-y|^{-s}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)$$

即得式(6.23)。(这里利用了康托集左右两部分具有相似性的论断，即：

$$(\mu\times\mu)\{(x,y):|x-y|<\frac{1}{3}\} = (\mu\times\mu)\{(x,y):|x-y|\geqslant\frac{1}{3}\},$$

由此，可将对 $t$ 的积分分成两部分)。

式(6.23)中的被积函数在积分域上是非奇异的，因而在数值计算上也不是太难处理。这个积分可以看成是 通过测度 $\mu\times\mu$ 给定分布的随机变量的期望，粗略地可以利用蒙特卡罗方法，或者较精确的可以作为一系列随机变量的矩进行计算。 □

上述证明毫无困难地适用于 $E$ 是"$m$ 部分康托集"的情形，这种所谓的"$m$ 部分康托集"是将单位区间细分为间隔相等且长度为 $\lambda$ 的 $m$ 个子区间，并按此方法进行迭代所得的分形集。于是 $E$ 是由相似变换族 $F_i(x)=\lambda x+(i-1)(1-\lambda)/(m-1)$, $i=1,\cdots,m$ 组成的 IFS 的不变集。则 $s=\dim_H E=-\log m/\log\lambda$ 且 $\mathcal{H}^s(E)=1$, 并对 $\mu$- 几乎所有的 $x$,

$$A^s(x)=\frac{1}{2^s\log m}\iint|x-y|^{-s}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)$$

其中 $\mu$ 是 $\mathcal{H}^s$ 在 $E$ 上的限制，而这里的双重积分是对全部的 $(x,y)\in\bigcup_{i\neq j}E_i\times E_j$ 进行积分。

这类集的平均密度显示在图 6.1 中，特别可以看出，相同维数的集可以有不同的平均密度；所以平均密度是用来区分相同维数的集合的一个参数 。

对由几个不同相似比的相似变换生成的自相似集，证明它的 $A^s(x)$ 存在且几乎处处是常数是比较复杂的。而对一般的 cookie-cutter 集，这个问题的证明更麻烦，需要用到系 6.2 的近似遍历定理。然而定理 6.6 的证明是这些进一步推广问题证明的基本原型。

设 $f:X_1\cup X_2\to X$ 是带有斥子 $E$ 的 $C^2$ 的 cookie-cutter 系统，其中 $E$ 是在 $X$ 的内部。又设 $s=\dim_H E$, 使 $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$, 而 $\mu=\mathcal{H}^s|_E$,为方便起见，先将在研究 $E$ 的平均密度中需要的已知结果罗列如下：

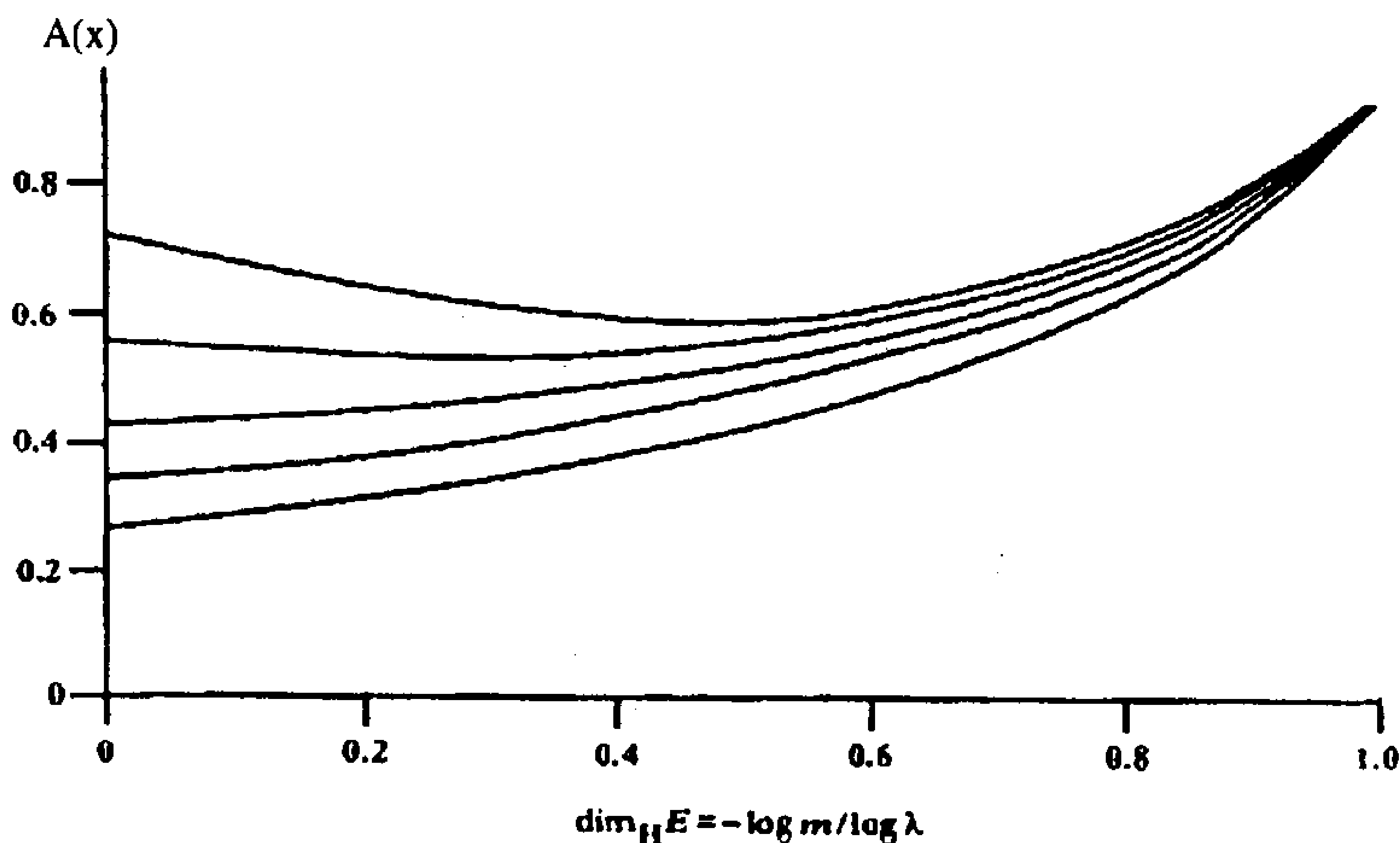



图 6.1 对不同的 $m$ 及不同的 $\dim_H E$, $m$ 部分康托集 $E$ 的平均密度

可以找到 $r_0$, 使当 $0<r\leqslant r_0$ 及 $x\in X$ 时,

$$B(x,r)\subset X \tag{6.25}$$

所以特别地,对任意 $k$ 及任意的 $(i_1,\cdots,i_k)\in I_k$, $F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}$ 是定义在所有这样的 $B(x,r)$上的。由式(5.20) 知,对任意 $x\in E$ 及 $r>0$, 存在数 $d>0$ 使

$$\mu(B(x,r))r^{-s}\leqslant d \tag{6.26}$$

注意到由式(4.12) 及式(4.17), 对任意 $q\geqslant k$ 及任意$(i_1,\cdots,i_q)$ 和任意 $x,y\in X_{i_1,\cdots,i_q}$, 存在数 $b>0$ 使

$$|\log|(f^k)'(x)|-\log|(f^k)'(y)||\leqslant b|X_{i_{k+1},\cdots,i_q}|$$

特别,由式(4.23), 如果 $x,y\in X_{i_1,\cdots,i_k}$ 及 $q$ 是使 $f^k(x),f^k(y)\in X_{i_{k+1},\cdots,i_q}$ 的最大整数,则

$$|\log|(f^k)'(x)|-\log|(f^k)'(y)||\leqslant b_1d^{-1}|f^k(x)-f^k(y)| \tag{6.27}$$

**定理 6.7**

设 $E$ 是 cookie-cutter 集,而 $\nu$ 是 $E$ 上的任意不变遍历测度,

则存在数 $a$ 使对 $\nu$- 几乎所有的 $x\in E$, 平均密度 $A^s(x)$ 存在且等于 $a$。

*** 证明** 基本论证与定理 6.6 平行，但是 cookie-cutter 系统的非线性性需要用到遍历定理的推广系 6.2。

对 $n=0,1,2,\cdots$ 及 $x\in E$, 令

$$\phi_n(x)=\int_{\log|(f^n)'(x)|}^{\log|(f^{n+1})'(x)|}e^{st}\mu(B(x,e^{-t}))dt \tag{6.28}$$

其中 $\mu=\mathcal{H}^s|_E$, 先证明 $\phi_n$ 满足系 6.2 的条件(6.9)。

固定 $x\in E$, 及固定整数 $n$ 和 $k$, 记

$$t_n=\log|(f^n)'(f^kx)| \tag{6.29}$$

(即在 $f^kx$ 处计算 $f^n$ 的导数), 设 $n$ 充分大，使 $e^{-t_n}\leqslant r$。而 $F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}$ 是使 $F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(f^kx)=x$ 的 $f^{-k}$ 的一个分支。

又设 $x_-,x_+$ 是区间

$$F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(B(f^kx,e^{-t_n})) \tag{6.30}$$

中的点，分别满足：

$$|(f^k)'(x_-)|=\inf|(f^k)'(x)|$$

及

$$|(f^k)'(x_+)|=\sup|(f^k)'(x)|$$

其中下、上确界是在区间(6.30)上取的。利用豪斯道夫测度(2.11)的李卜希兹性质，并由中值定理用通常的方法得到相应的李卜希兹常数，则对 $t\geqslant t_n$,

$$\begin{aligned}\mu(B(f^kx,e^{-t}))&\leqslant|(f^k)'(x_+)|^s\mu(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(B(f^kx,e^{-t})))\\&\leqslant|(f^k)'(x_+)|^s\mu(B(x,e^{-t}|(f^k)'(x_-)|^{-1}))\end{aligned}$$

(上式最后一步是把中值定理应用到 $F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}$ 而得出的，注意到 $(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k})'(f^k(x))=(f^k)'(x)^{-1}$)。

由式(6.28)及(6.31), 然后作代换 $u=t+\log|(f^k)'(x_-)|$，则

$$
\begin{aligned}
\phi_n(f^k x) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{st}\mu(B(f^k x, e^{-t}))\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{st}\mu(B(x, e^{-t}|(f^k)'(x_-)|^{-1}))|(f^k)'(x_+)|^s \mathrm{d}t \\
&= \int_{u=t_n+\log|(f^k)'(x_-)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x_-)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))\left|\frac{(f^k)'(x_+)}{(f^k)'(x_-)}\right|^s \mathrm{d}u \\
&\leqslant \int_{t_n+\log|(f^k)'(x)|}^{t_{n+1}+\log|(f^k)'(x)|} e^{su}\mu(B(x, e^{-u}))\mathrm{d}u + \varepsilon_n
\end{aligned}
$$

利用式(6.26)及(6.27)，并注意到由式(6.30)当 $n\to\infty$ 时，$|f^k x - f^k x_-|$，$|f^k x - f^k x_+|$ 一致地趋于零，即得当 $n\to\infty$ 时，上式中的 $\varepsilon_n$ 对 $k$ 和 $x$ 一致地趋于零。由于由链条法则知

$$t_n + \log|(f^k)'(x)| = \log|(f^{n+k})'(x)|,\text{ 即}$$

$$\phi_n(f^k x) \leqslant \phi_{n+k}(x) + \varepsilon_n$$

其中 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$。这就证明了不等式

$$|\phi_n(f^k x) - \phi_{n+k}(x)| \leqslant \varepsilon_n \qquad (x\in E)$$

的一半，而另一半的证明可以用完全同样的方法进行证明。

因为 $\nu$ 是不变遍历测度，所以由系 6.2 知，存在 $a_0>0$，使对 $\nu$-几乎所有的 $x$，

$$\frac{1}{m}\int_0^{\log|(f^m)'(x)|} e^{st}\mu(B(x, e^{-t}))\mathrm{d}t = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\phi_k(x) \to a_0$$

由命题 6.3 知，对 $\mu$-几乎所有的 $x$，$\frac{1}{m}\log|(f^m)'(x)| \to \lambda$，这里 $\lambda$ 是李雅普洛夫指数，所以当 $m\to\infty$ 时，

$$\frac{1}{\log|(f^m)'(x)|}\int_0^{\log|(f^m)'(x)|} e^{st}\mu(B(x, e^{-t}))\mathrm{d}t \to a_0\lambda^{-1}$$

由于被积函数是有界的(见式(6.26))，可以将 $m\to\infty$ 的序列的极限改成如式(6.21)的 $T\to\infty$ 的连续极限，即得对 $\nu$-几乎所有的 $x$。

$$A^s(x) = a_0\lambda^{-1}2^{-s} \qquad \square$$

通过适地选择 $\nu$，可以得到关于 cookie - cutter 集平均密度存在的自然的结果。

**系 6.8**

设 $E$ 是豪斯道夫维数为 $s$ 的 cookie-cutter 集，则存在 $a>0$ 使对 $\mathcal{H}^s$- 几乎所有的 $x\in E$

$$A^s(x)\equiv\lim_{T\to\infty}\int_{t=0}^{T}\frac{\mathcal{H}^s(E\cap B(x,e^{-t}))}{(2e^{-t})^s}\,dt=a \tag{6.32}$$

**证明** 根据引理 6.4(c)，存在与 $\mathcal{H}^s|_E$ 等价的 $E$ 上的不变遍历测度 $\nu$，则易见式(6.32) 是命题 6.7 在此情形下的一种变化形式。 □

与密度不同，平均密度对广泛类型的分形都有定义且是描述它们的一 个自然参数。遗憾的是平均密度通常是很难计算，甚至进行数值计算也是很难的，只能利用定理 6.6 所显示的应用于康托集的类似的方法，对某些 cookie-cutter 集的平均密度进行估计，但这也是相当复杂的。

还有另一种通过奇异积分 $\int|x-y|^{-s}d\mu(y)$ 表示平均密度 $A^s(x)$ 的方法。

**命题 6.9**

设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有限测度，设 $x\in\mathbb{R}^n$，对 $x\in E$ 及 $r>0$，

$$\mu(B(x,r))\leqslant dr^s \tag{6.33}$$

如果在 $x$ 处 $\mu$ 的平均密度 $A^s(x)$ 存在，则

$$A^s(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2^s s|\log\varepsilon|}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}\frac{d\mu(y)}{|x-y|^s}\,。 \tag{6.34}$$

**证明** 在式(6.20) 中，记 $m(r)=\mu(B(x,r))$，则

$$A^s(x,T)=2^{-s}T^{-1}\int_0^T e^{st}m(e^{-t})dt$$

作变换 $r=\mathrm{e}^{-t}$ 及 $\varepsilon=\mathrm{e}^{-T}$, 然后进行分部积分，利用式(6.33) 及 $\int_1^\infty r^{-s}\mathrm{d}m(r)<\infty$, 则有

$$
\begin{aligned}
A^s(x,-\log\varepsilon) &= 2^{-s}|\log\varepsilon|^{-1}\int_{r=\varepsilon}^{1} r^{-s-1}m(r)\mathrm{d}r \\
&= 2^{-s}|\log\varepsilon|^{-1}s^{-1}[m(\varepsilon)\varepsilon^{-s}-m(1)+\int_{r=\varepsilon}^{1} r^{-s}\mathrm{d}m(r)] \\
&= 2^{-s}|\log\varepsilon|^{-1}s^{-1}\left[O(1)+\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}|x-y|^{-s}\mathrm{d}\mu(y)\right]
\end{aligned}
$$

即得式(6.34) □

反之，奇异积分也可以通过平均密度来表示，即当 $\varepsilon\to 0$ 时，式(6.34) 可变成

$$
\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s} \sim 2^s s|\log\varepsilon|A^s(x) \tag{6.35}
$$

因为平均密度，或等价的奇异积分仅只依赖于在 $x$ 任意小的邻域中的测度 $\mu$, 所以易见对任意连续函数 $f:E\to\mathbb{R}$,

$$
\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}\frac{f(y)\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s} \sim 2^s s|\log\varepsilon|f(x)A^s(x) \tag{6.36}
$$

事实上，如果 $f\in L^1(\mu)$( 即 $f$ 是满足 $\int|f|\mathrm{d}\mu<\infty$ 的可测函数 ), 则对 $\mu$- 几乎所有的x，式(6.36) 成立。在调和分析领域，可以利用 Hardy-littlewood 最大定理的一个变形证明这个结果，而把对连续函数成立的公式转换成对可积函数同样成立。在 $s=\log2/\log3$, $E$ 是三分康托集且 $\mu=\mathcal{H}^s|_E$ 的情形，利用式 (6.23), 公式(6.36) 变成对几乎所有的 $x$,

$$
\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}\frac{f(y)\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s} \sim |\log\varepsilon|f(x)\times 0.60912\cdots.
$$

## 6.3 注记与参考文献

有关遍历定理的详细论述及它的变化形式可参见 Parry (1981) 和 Petersen(1983) 的书。Birkhoff(1931) 首先证明了遍历定理，而本章给出的证明本质上是由 Katznelson 和 Weiss(1982) 给出的。

遍历定理对动力系统的应用，特别是对李雅普洛夫指数的应用是 Pollicott(1992) 的文章描述的。

Salli(1985) 的文章给出了命题 6.5 的非遍历证明。Bedford 和 Fisher (1992) 的文章引入了平均密度，他们证明了 cookie-cutter 集上平均密度的存在性。本章叙述的方法是 Falconer (1992b) 给出的。Patzschke 和 Zähle(1993) 计算了三分康托集情形的平均密度的值，而 Leistritz(1994) 计算了 $m$ 部分康托集。Bedford 和 Fisher(1992) 和 Falconer 和 Xiao(1995) 考虑了布朗轨道的平均密度和其它随机集。Patzschke 和 Zähle(1993) 利用相似的技巧研究了分形函数的局部性质。

## 练习

6.1 推导出 $\phi\in L^1(\mu)$ 情形下的(而不是对任意 $x$, $|\phi(x)|\leqslant M$ 的限制)的遍历定理。为做到这点，先假设对任意 $x$, $\phi(x)\geqslant 0$, 利用定理 6.1 到函数 $\phi'(x)=\max\{\phi(x),M\}$ 上。简言之，修改定理 6.1 的证明使 $\phi$ 可以是无界的。

6.2 验证不等式(6.22)。

6.3 设 $E$ 是满足 $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$ 的实区间 $[a,b]$ 的紧子集，又设存在 $x\in E$ 使平均密度 $A^s(x)$ 存在。$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 证明如果 $f$ 是具有连续导数的单射，则 $A^s(x)$ 等于 $f(E)$ 在 $f(x)$ 的平均密度，但如果 $f:[a,b]\to f[a,b]$ 仅仅是双李卜希兹的，则上述结论未必成立。

6.4 验证式(6.17)和(6.18)定义的密度 $\underline{D}^s(x)$ 和 $\overline{D}^s(x)$ 是 $\mu$ 可测函数。

6.5 设 $s=\log2/\log3$，$E$ 是三分康托集，$\mu=\mathcal{H}^s|_E$，且 $p>0$，证明与定理 6.6 类似，$p$ 次幂的平均密度 $\lim\limits_{T\to\infty}T^{-1}\int_0^T\mu(B(x,\mathrm{e}^{-t}))^p\mathrm{e}^{pst}\mathrm{d}t$ 存在，且对 $\mu$- 几乎所有的 $x$ 是常数。

6.6 定义 $\mu$ 的(右)单边平均密度 $A_R^s(x)=\lim\limits_{T\to\infty}\int_{t=0}^T\mu([x,x+\mathrm{e}^{-t}])/\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$，证明以 $\mu$ 作为康托集上的普通测度，$A_R^s(x)$ 存在且几乎处处是常数。这个值等于什么？其相应的几乎必然的左单边密度又如何？与 $\mu$ 的平均密度有什么关系？

6.7 在 $f$ 是连续函数的情形验证式(6.36)。

# 第 7 章　更新定理与分形

更新定理是概率分析中的另一个主要定理,它在分形几何中已得到很好的应用。分形的某些自相似性反映在与更新方程的等价关系上，因此,更新定理的结论就可以转而给出分形结构的一些信息。

## 7.1　更新定理

设 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一给定函数，$\mu$ 是给定的支撑在$[0,+\infty)$ 上波雷尔概率测度。称积分方程：

$$f(t)=g(t)+\int_0^{\infty} f(t-y)\mathrm{d}\mu(y)\qquad (t\in\mathbb{R})\tag{7.1}$$

为*更新方程*。令人感兴趣的是这个方程的"解"$f$；特别,更新定理将告诉我们当 $t\to+\infty$ 时 $f(t)$ 的性状。经常把变量$t$当作"时间",因而式(7.1) 表示 $f$ 在时刻 $t$ 时的值依赖于 $t$ 之前的值。

更新方程作为积分方程在方程领域中已被广泛研究，同时它在概率论中也具有基本的重要性。经常被引用的例子是考虑灯泡的更新或替换。在时刻 0 时，装上一个新的灯泡，在它烧坏的瞬间换上新灯泡，如此进行下去。设 $\mu$ 为灯泡寿命分布的概率测度( 因而 $\mu([t_1,t_2])$ 就是灯泡在时间区间$[t_1,t_2]$ 内烧坏的概率 ),取 $g(t)=0\ (t<0)$, $g(t)=1\ (t\geqslant 0)$, 又设 $f(t)$ 是到时刻 $t$ 替换的期望次数，则 $f(t)$ 满足方程 (7.1)。为看清这点，设第一次替换发生在时刻 $y>0$, 则对 $t>y$

#( 到时刻 $t$ 的替换次数 )$=1+$#( 到时刻 $t-y$ 的替换次数 )

更新方程可方便地用卷积来表达。回顾一下，如果 $\mu$ 是$[0,+\infty)$上的波雷尔测度，$f$是$\mathbb{R}$上的波雷尔可测函数，假定下述

积分存在，定义卷积 $f*\mu$ 为：

$$(f*\mu)(t)=\int_0^\infty f(t-y)\mathrm{d}\mu(y) \tag{7.2}$$

在这一记号下，式(7.1)可表成：

$$f=g+f*\mu \tag{7.3}$$

下面需要反复计算这个方程对 $\mu$ 的卷积，因而定义 $k$-阶卷积 $\mu^{*k}$，取 $\mu^{*0}$ 是在0处的单位质量(因而 $f*\mu^{*0}=f$)，取 $\mu^{*1}=\mu$，一般地，对于 $k=1,2,\cdots$，令

$$(f*\mu^{*k})(t)=(f*\mu^{*(k-1)}*\mu)(t) \tag{7.4}$$

$$=\int_0^\infty (f*\mu^{*(k-1)})(t-y)\mathrm{d}\mu(y)$$

$$=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty f(t-y_1-\cdots-y_k)\mathrm{d}\mu(y_1)\cdots\mathrm{d}\mu(y_k) \tag{7.5}$$

(易见卷积满足结合律，所以在式(7.4)中不必使用括号)。把式(7.2)反复代入本身 $k-1$ 次可得到式(7.5)的形式。和 $y_1+\cdots+y_k$ 的分布对于更新理论而言是一个中心问题。

首先证明，在适当的条件下，更新方程有唯一解。取 $\mu$ 为支撑在 $[0,+\infty)$ 上的波雷尔概率测度，使

$$\lambda\equiv\int_0^\infty t\,\mathrm{d}\mu(t)<\infty \tag{7.6}$$

为了避免出现平凡的情形，设 $\mu$ 不是集中在0的单点测度，即 $\mu(\{0\})<1$，显然，对任何 $a>0$

$$\gamma_a\equiv\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}\mu(t)<1 \tag{7.7}$$

这里总是假定 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的不连续点集是离散集，并且存在 $c>0$，$\alpha>0$ 使

$$|g(t)|\leqslant c\,\mathrm{e}^{-\alpha|t|}\qquad (t\in\mathbb{R}) \tag{7.8}$$

特别 $g$ 是有界、可积的。(事实上这一理论在相当弱的条件下就成立：只需假定 $g$ 是"直接的黎曼可积"就足够了。)

给定条件(7.6)－(7.8),就可以表示出更新方程的解。记 $\mathcal{F}$ 是满足下列条件的波雷尔可测函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的空间,$\lim_{t\to-\infty} f(t)=0$,且对任意 $a\in\mathbb{R}$, $f$ 在半直线$(-\infty,a]$上有界。空间 $\mathcal{F}$ 自然是一个可在其上寻找式(7.1)的解的空间.

**命题 7.1**

设 $g$ 和 $\mu$ 满足式(7.6)－(7.8),则存在唯一的 $f\in\mathcal{F}$,满足更新方程(7.1),且

$$f=\sum_{k=0}^{\infty} g*\mu^{*k} \tag{7.9}$$

即

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} g(t-y_1-\cdots-y_k)\mathrm{d}\mu(y_1)\cdots\mathrm{d}\mu(y_k) \tag{7.10}$$

进而,$f(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界,且如果 $g$ 连续,则 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。

**证明** 下面在简化了的情况下证明这一命题。即假设存在 $\tau>0$ 使得

$$\mu[0,\tau]=0 \tag{7.11}$$

(这一假设在所有应用中都成立,没有这一附加条件的命题的证明见练习 7.1。)

利用式(7.8),并注意到 $\mu$ 是概率测度,对于 $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}|g(t-y_1-\cdots-y_k)|\mathrm{d}\mu(y_1)\cdots\mathrm{d}\mu(y_k)\\
&\quad=\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{m}|g(t-y_1-\cdots-y_k)|\mathrm{d}\mu(y_1)\cdots\mathrm{d}\mu(y_m)\\
&\quad\leqslant c\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\mathrm{e}^{-\alpha|t-y_1-\cdots-y_k|}\mathrm{d}\mu(y_1)\cdots\mathrm{d}\mu(y_m)
\end{aligned} \tag{7.12}$$

$$\leqslant c\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}2/(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau})\mathrm{d}\mu(y_1)\cdots\mathrm{d}\mu(y_m) \tag{7.13}$$

$$=2c/(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau}) \tag{7.14}$$

为了得到式(7.13),由式(7.11)知，$y_1,\cdots,y_m$ 除去 $\mu\times\cdots\times\mu$ 的一个零测集$(y_1,\cdots,y_m)$之外，均大于等于 $\tau$。因此级数(7.10)绝对一致收敛，且对任意 $t\in\mathbb{R}$

$$|f(t)|\leqslant 2c/(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau}) \tag{7.15}$$

对于 $t<0$, 式(7.12)的界为：

$$c\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\mathrm{e}^{\alpha(t-y_1-\cdots-y_k)}\mathrm{d}\mu(y_1)\cdots\mathrm{d}\mu(y_m)\leqslant c\mathrm{e}^{\alpha t}/(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau}), \tag{7.16}$$

这里再一次使用了式(7.11)。把上述结果应用到式(7.10)中，可得，对任意 $t<0$

$$|f(t)|\leqslant c\mathrm{e}^{\alpha t}/(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau}) \tag{7.17}$$

因此 $\lim_{t\to-\infty}f(t)=0$, 所以 $f\in\mathcal{F}$。

对于任意 $t$, 则

$$\sum_{k=0}^{m}(g*\mu^{*k})(t)=g(t)+\sum_{k=0}^{m-1}((g*\mu^{*k})*\mu)(t)$$

$$=g(t)+\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}(g*\mu^{*k})(t-y)\mathrm{d}\mu(y)$$

令 $m\to\infty$, 并注意到式(7.14), 由控制收敛定理知 $f$ 满足式(7.1)。

现假定 $f_1,f_2\in\mathcal{F}$ 均为式(7.1)的解，则 $f_0\equiv f_1-f_2\in\mathcal{F}$ 满足 $f_0=f_0*\mu$, 反复与 $\mu$ 做卷积，则有 $f_0=f_0*\mu^{*k}$ 对所有 $k$ 成立。这样对任意 $u\in\mathbb{R}$ 及 $k=1,2,\cdots$

$$|f_0(t)|=\left|\int\cdots\int_{y_1+\cdots+y_k>u}f_0(t-y_1-\cdots-y_k)\mathrm{d}\mu(y_1)\cdots\mathrm{d}\mu(y_k)\right.$$

$$+\left.\int\cdots\int_{u-y_1-\cdots-y_k\geq 0} f_0(t-y_1-\cdots-y_k)\mathrm{d}\mu(y_1)\cdots\mathrm{d}\mu(y_k)\right|$$

$$\leqslant \sup_{v\leqslant t-u}|f_0(v)|+\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\sup_{v\leqslant t}|f_0(v)|\mathrm{e}^{u-y_1-\cdots-y_k}\mathrm{d}\mu(y_1)\cdots\mathrm{d}\mu(y_k)$$

$$\leqslant \sup_{v\leqslant t-u}|f_0(v)|+\sup_{v\leqslant t}|f_0(v)|\mathrm{e}^{u}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}\mu(y)\right)^k$$

给定 $\varepsilon>0$, 可选充分大的 $u$ 使上式第一项小于 $\frac{1}{2}\varepsilon$ (由于 $\lim_{v\to-\infty}f_0(v)=0$)。然后,选充分大的 $k$ 使上式第二项小于 $\frac{1}{2}\varepsilon$ (利用式(7.7) 及 $f_0$ 的有界性), 这样对任意 $\varepsilon>0$, $|f_0(t)|<\varepsilon$, 所以 $f_0(t)=0$, 即对任意 $t\in\mathbb{R}$, $f_1(t)=f_2(t)$。

最后证明: 如果 $g$ 连续, 则 $f$ 一致连续。给定 $\varepsilon>0$, 由式(7.8), 如果选择 $T$ 充分大, 对任意 $|t|>T$, $|g(t)|\leqslant\varepsilon\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha|t|}$。由此及 $g$ 在区间 $[-T-1,T+1]$ 上的一致连续性可推知: 存在 $h_0>0$, 对任意 $t\in\mathbb{R}$ 及 $0<h\leqslant h_0$

$$|g(t+h)-g(t)|\leqslant 2\varepsilon\mathrm{e}^{-\alpha|t|/2} \tag{7.18}$$

在式(7.9) 或式(7.10) 中, 用 $g(h+\cdot)-g(\cdot)$ 替代 $g(\cdot)$ 即得:

$$f(t+h)-f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}((g(h+\cdot)-g(\cdot))*\mu^{*k})(t)。$$

用式(7.18) 取代式 (7.8) 可得到 $|g(t+h)-g(t)|$ 的有界性, 利用这一点并把对式(7.15) 的估计应用到 $f(t+h)-f(t)$ 上, 即得: 对任意 $t\in\mathbb{R}$ 及 $0<h\leqslant h_0$, $\quad |f(t+h)-f(t)|\leqslant 4\varepsilon/(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau/2})$ 成立。由于 $\varepsilon$ 可任意小, 所以 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。□

在更新理论中有两种相当不同的情况。第一种情形是, $\mu$ 可能由某个 $\tau>0$ 的整数倍的离散集所支撑, 在这种情况下, 对所有的 $k$, $\mu^{*k}$ 由同一个集所支撑。因而由式(7.10) 知 $f(t)$ 仅依赖于 $g(t-k\tau)$, $k=0,1,2,\cdots$。 而另一种情形, 是这样的 $\tau$ 不存在。为

了了解这一差别的意义，再一次考虑灯泡替换的例子。如果生产工艺保证灯泡总是在24小时的整数倍烧坏，若第一个灯泡是在午夜安装；则更新仅发生在午夜。另一方面，如果灯泡的寿命分布不具有这种周期性，则经过相当长时间之后，灯泡的替换在白天或黑夜都在可能发生。

由此，可定义测度 $\mu$ 是 *$\tau$-算术的*：如果 $\tau>0$ 是使得 $\mu$ 的支撑包含在加法群 $\tau\mathbb{Z}\equiv\{\tau k;\ k\in\mathbb{Z}\}$ 中的最大正数。如果这样的 $\tau$ 不存在，则称 $\mu$ 是*非 $\tau$-算术的*。作为一个简单的例子，假定 $\mu$ 的支撑是两点集 $\{y_1,y_2\}$，这里 $y_1,y_2>0$，则 $y_1/y_2$ 为无理数时，$\mu$ 是非算术的。当 $y_1/y_2$ 为有理数时，设 $y_1=k_1\tau$，$y_2=k_2\tau$，其中 $k_1,k_2$ 是互质的整数，则 $\mu$ 是 $\tau$-算术的。类似地，例如 $\mu$ 的支撑包含区间，则 $\mu$ 是非算术的。

更新定理考虑当 $t\to\infty$ 时更新方程的解 $f$ 的极限性状。其主要结论是：在非算术的情形下，$\lim_{t\to\infty}f(t)$ 存在；而在 $\tau$-算术的情形下，$f$ 渐近于以 $\tau$ 为周期的周期函数。

更新定理有各种各样的证明，但没有特别初等的证明。这里给出了两种证明：第一种证明用到了概率论的思想，并且通过“游戏”给予直观的解释。第二种证明利用傅立叶变换，并需要借助于 Tauberian 定理。

**定理 7.2（更新定理）**

设 $g,\mu$ 满足式(7.6)－(7.8)，$f\in\mathcal{F}$ 满足更新方程(7.1)。如果 $\mu$ 是非算术的，则

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\mathrm{d}y \tag{7.19}$$

如果 $\mu$ 是 $\tau$-算术的，则对任意 $y\in[0,\tau)$，

$$\lim_{k\to\infty}f(k\tau+y)=\lambda^{-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}g(j\tau+y) \tag{7.20}$$

**第一种证明** 这一证明利用了概率论的思想。这里给出算术情形的证明，虽然它也适用于非算术的情形。通过把坐标放大或缩小适当的倍数，可以认为 $\mu$ 是 1-算术的，再通过坐标平移，可设式(7.20)中的 $y=0$。

下面用概率的术语来表述更新方程(7.10)的解。设 $(Y_1,Y_2,\cdots)$ 是独立的同以概率测度 $\mu$ 为分布的随机变量序列（因而对于任意 $j$，$\mu(A)$ 是 $Y_j\in A$ 的概率）。记 P 是序列 $(Y_1,Y_2,\cdots)$ 的集上的乘积测度，E 是相应于 P 的期望。用这些记号，式(7.10)可写成：

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{E}(g(t-Y_1-\cdots-Y_k))$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{\infty}g(j)\mathrm{P}(\text{存在 }k,\text{使 }Y_1+\cdots+Y_k=t-j) \qquad (7.21)$$

固定 $m\in\mathbb{Z}^+$，考虑下列二人游戏：设有一块“板子”，由一系列标号为 $\{-m,-m+1,\cdots,-1,0,1,2,\cdots\}$ 的“正方形”组成，见图 7.1。甲从第 $-m$ 正方形开始，乙从第 0 正方形开始。两人反复掷一枚“骰子”以决定移动的步数。设掷出 $x$ 点的概率为 $\mu(\{x\})$，并且如果掷出 $x$ 点，就向前走 $x$ 步。直观上很明显（至少对于玩过板子游戏的人来说），如果 $y$ 是一个很大的整数，则实际上甲、乙有同样的机会在游戏的某一步到达第 $y$ 正方形，尽管开始的位置不同。为了看清这一点，假设概率测度 $\mu$ 是由有限整数点集 $\{1,\cdots,q\}$ 所支撑，且 $\mu(\{1\})>0$，所以游戏者每次移动的位置总是

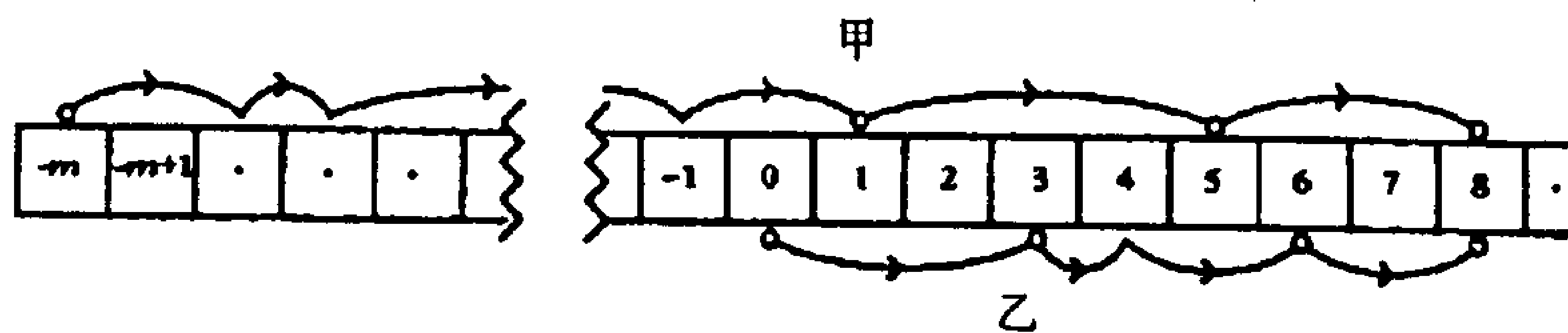



图 7.1 更新定理证明中的“游戏”。以概率 1 游戏者最终到达同一个正方形上

在1到 $q$ 之间，并且有一正的概率只移动一步。游戏者以下述方式依次移动位置，甲先掷"骰子"、移动，并重复这一过程，直到他的位置到达乙，或者超过乙的位置。然后乙掷"骰子"、移动、直到他的位置到达甲，或超过甲的位置。之后又轮到甲，如此下去。则以概率1，甲、乙中有一个最终会到达另一人所占据的正方形。这是因为在每次轮流开始时，两人之间的位置不超过 $q$，故至少有 $\varepsilon=\mu(\{1\})^q>0$ 的概率，在本轮结束时，两人占据相同位置，而与以前发生的事是相互独立的。这样在 $n$ 次轮流之前甲、乙没有相遇的概率最多为 $(1-\varepsilon)^n\to 0$，当 $n\to\infty$ 时。上述讨论适用于一般的 $\mu$。1-算术的条件意味着，甲、乙二人在有限次轮流中相遇这一事件有正的概率。条件(7.6)保证：由每掷一次"骰子"而移动经过的正方形个数的期望值是有限的。

显然，一旦甲、乙位于同一正方形，则甲、乙沿给定的正方形序列行进的概率相同。记 $S_n$ 为"甲、乙第一个同时到达的正方形为正方形 $n$"这一事件，设 $r\geqslant n$，则

$$\mathrm{P}(\text{甲到达 } r|S_n)=\mathrm{P}(\text{乙到达 } r|S_n),$$

这里的概率是在 $S_n$ 条件下的条件概率。由游戏的"平移不变性"，对 $r\geqslant m\geqslant 0$，

$$\begin{aligned}&|\mathrm{P}(\text{乙到达 } r+m)-\mathrm{P}(\text{乙到达 } r)|\\&=|\mathrm{P}(\text{甲到达 } r)-\mathrm{P}(\text{乙到达 } r)|\\&=\left|\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{P}(\text{甲到达 } r|S_n)-\mathrm{P}(\text{乙到达 } r|S_n)]\mathrm{P}(S_n)\right|\\&\leqslant\sum_{n=r+1}^{\infty}\mathrm{P}(S_n)\\&=\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=r+1}^{\infty}S_n\right)\to 0\end{aligned}$$

并由上一段叙述知，当 $r\to\infty$ 时，上式对 $m$ 一致收敛到0，因此 $\{\mathrm{P}(\text{乙到达 } r)\}_{r=1}^{\infty}$ 是哥西序列，所以，

$$\mathrm{P}(\text{乙到达 } r) \to \eta \tag{7.22}$$

当 $r \to \infty$ 对某一 $\eta$ 成立。由式(7.6)知，乙每掷一次“骰子”后行进经过的正方形个数的平均值为 $\sum_{t=0}^{\infty} t\mu(\{t\}) = \lambda$，显然 $\eta = \lambda^{-1}$。通过随机变量 $Y_i$ 来解释式(7.22)就是：当 $r \to \infty$，

$$\mathrm{P}(\text{存在 } k, \text{使 } Y_1 + \cdots + Y_k = r) \to \eta = \lambda^{-1},$$

这样，当 $t \to \infty$ 时，和式(7.21)中的“第 $j$ 项”收敛于 $g(j)\lambda^{-1}$，由式(7.8)，$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |g(j)| < \infty$，而 $\mu$ 是概率测度，由控制收敛定理即知 $f(t) \to \sum_{j=-\infty}^{\infty} g(j)\lambda^{-1}$。

*** 第二种证明** 这种方法利用了傅立叶变换的性质和维纳的 Tauberian 定理。

这关系到函数的卷积 $(f * \psi)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y$ 当 $r \to \infty$ 时极限的存在性问题。维纳的 Tauberian 定理指出：如果 $f$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数，并且存在函数 $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ 使当 $x \to \infty$ 时，$(f * \psi)(x) \to l$，则对任意 $\phi \in L^1(\mathbb{R})$

$$(f * \phi)(x) \to l \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\mathrm{d}y \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\mathrm{d}y \tag{7.23}$$

倘若 $\psi$ 的傅立叶变换不为 0，即对任意的 $u \in \mathbb{R}$，

$$\hat{\psi}(u) \neq 0 \tag{7.24}$$

其中 $\hat{\psi}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{iux}\psi(x)\mathrm{d}x$ 是 $\psi$ 的傅立叶变换。

[对于“充分好”的函数，这一定理的直观考虑方式是：如果 $\hat{\psi}(u) \neq 0$，而 $\phi$ 是一个其傅立叶变换 $\hat{\phi}$ 迅速下降的函数，则可由 $\hat{\phi}(u) = \hat{\psi}(u)\hat{h}(u)$ 来定义 $\hat{h}(u)$，从而由卷积定理，$\phi = \psi * h$，这里 $h$ 是傅立叶变换为 $\hat{h}$ 的函数，形式上有

$$(f * \phi)(x) = ((f * \psi) * h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * \psi)(x-y)h(y)\mathrm{d}y \tag{7.25}$$

只要 $h\in L^1(\mathbb{R})$，上式积分的主要贡献来自"相对较小"的 $y$。所以，如果 $x$ 非常大，则对使 $h(y)$ 有意义的 $y$，$(f*\psi)(x-y)$ 接近于 $l$，于是式(7.25) 的积分接近于 $l\int_{-\infty}^{\infty}h(y)\mathrm{d}y$。由于 $\phi=h*\psi$，所以 $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}h(y)\mathrm{d}y$，因而式(7.23) 成立。]

下面在 $\mu$ 是非算术的情况下，介绍更新定理的 Tauberian 证明。首先假设 $g$ 是连续的，则由命题 7.1 知 $f$ 一致连续。对式(7.1) 积分、移项并交换积分次序，得：

$$\begin{aligned}\int_{t=-\infty}^{x}g(t)\mathrm{d}t&=\int_{y=0}^{\infty}\int_{t=-\infty}^{x}[f(t)-f(t-y)]\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu(y)\\&=\int_{y=0}^{\infty}\int_{t=x-y}^{x}f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu(y)\\&=\int_{t=-\infty}^{x}\int_{y=x-t}^{\infty}f(t)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}t\\&=\int_{t=-\infty}^{x}f(t)\mu[x-t,\infty)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因此，如果定义 $\psi(t)=0$，当 $t<0$；$\psi(t)=\mu([t,\infty))$，当 $t\geqslant 0$。则

$$\int_{-\infty}^{x}g(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\psi(x-t)\mathrm{d}t=(f*\psi)(x)\qquad(7.26)$$

特别，当 $x\to\infty$ 时

$$(f*\psi)(x)\to\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\mathrm{d}t\qquad(7.27)$$

维纳的定理(7.23) 告诉我们：如果傅立叶变换条件(7.24) 成立，则对任意 $\phi\in L^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}(f*\phi)(x)&\to\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\phi(y)\mathrm{d}y\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)\mathrm{d}y\\&=\lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\phi(y)\mathrm{d}y\end{aligned}\qquad(7.28)$$

因为由式(7.6), $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\mu([t,\infty))\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}t\,\mathrm{d}\mu(t)=\lambda$。为了验证式 (7.24),可利用$\mu$的非算术性。对于 $u=0$, $\hat{\psi}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)\mathrm{d}y=\lambda>0$; 对于 $u\neq 0$, 由分部积分得:

$$
\begin{aligned}
\hat{\psi}(u)&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{iut}\mu([t,\infty))\mathrm{d}t\\
&=\left(\mu([0,\infty))-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{iut}\mathrm{d}\mu(t)\right)\Big/iu\\
&=\left(1-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{iut}\mathrm{d}\mu(t)\right)\Big/iu
\end{aligned}
$$

由于$\mu([0,\infty))=1$,所以如果存在 $u\neq 0$, 使$1=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{iut}\mathrm{d}\mu(t)$, 唯一的可能是对几乎所有的$t$, $\mathrm{e}^{iut}=1$,这就要求对$\mu$-几乎所有的 $t$, 存在整数 $n$, 使 $t=2n\pi/u$, 因而 $\mu$ 是$(2\pi/u)$-算术的。因此,对任意 $u\in\mathbb{R}$, $\hat{\psi}(u)\neq 0$, 即条件 (7.24) 成立,所以式(7.28) 成立。

在式(7.28) 中,以 $f(x)$ 代替$(f*\phi)(x)$, 并选取$\phi$接近“狄拉克 $\delta$-函数”。由命题 7.1, $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续,因而对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<h\leqslant\delta$ 时,对任意的 $x\in\mathbb{R}$, $|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon$。选取 $\phi\geqslant 0$, 使得 $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(y)\,\mathrm{d}y=1$ 且当 $|y|\geqslant\delta$ 时 $\phi(y)=0$, 则有 $|f(x)-(f*\phi)(x)|<\varepsilon$ 对任意 $x$ 成立。由于 $\varepsilon$ 可以选的任意小,故由式(7.28) 可得:当 $x\to\infty$ 时, $f(x)\to\lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\mathrm{d}t$, 这就是式(7.19)。

最后,可以把这一定理推广到$g$在一个离散点集上不连续的情况。任意给定 $\varepsilon>0$, 可找到 $g_0,g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使 $g=g_0+g_1$, 其中 $g_0$ 是连续的,而 $g_1\geqslant 0$, 且 $\int_{-\infty}^{\infty}g_1(t)\mathrm{d}t<\varepsilon$。类似地,可找到连续函数 $g_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$使 $g_2\geqslant g_1$, 且 $\int_{-\infty}^{\infty}g_2(t)\mathrm{d}t<2\varepsilon$, 并且可进一步要求$g_0,g_1$和$g_2$对常数 $c$ 满足有界条件(7.8)。设$f_0$ ,$f_1$和 $f_2$ 是与 $g_0,g_1$和 $g_2$对应的更新方程的解(由式(7.9) 给出)。上面已经证明了更新定理对于连续函数 $g_0,g_2$ 成立,故当 $x\to\infty$ 时

$$f_0(x) \to \lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g_0(t)\mathrm{d}t$$

且 $0 \leqslant \limsup_{x\to\infty} f_1(x) \leqslant \limsup_{x\to\infty} f_2(x) = \lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t)\mathrm{d}t < 2\lambda^{-1}\varepsilon$

从而，如果 $x$ 充分大，则

$$\begin{aligned}
&\left|f(x) - \lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant |f(x) - f_0(x)| + \left|f_0(x) - \lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g_0(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\quad + \lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} |g_0(t) - g(t)|\mathrm{d}t \\
&= |f_1(x)| + \left|f_0(x) - \lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g_0(t)\mathrm{d}t\right| + \lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)\mathrm{d}t \\
&< 3\lambda^{-1}\varepsilon
\end{aligned}$$

因此，在这种情况下结论(7.19)成立。 □

至于有关的应用，$\mu$ 具有相当特殊的形式，它支撑在一有限集上，并且可用下面的方式表述更新定理。称正实数集$\{y_1,\cdots y_m\}$是 *τ-算术的*，如果 $\tau>0$ 是使得每个 $y_i$ 都可表成 $\tau$ 的整数倍的最大实数。如果这样的 $\tau$ 不存在，则称该集合是*非算术的*。

**系 7.3**

设$m\geqslant 2$, $y_1,\cdots,y_m>0$ 是"时间", $p_1,\cdots,p_m>0$是"概率"，因而$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$。设 $g$ 满足式(7.8)，并设 $f\in\mathcal{F}$ 满足下面形式的更新方程：

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} p_j f(t - y_j) \tag{7.29}$$

如果$\{y_1,\cdots,y_m\}$是非算术的，则

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\mathrm{d}y$$

如果$\{y_1,\cdots,y_m\}$是$\tau$-算术的，则

$$\lim_{k\to\infty} f(k\tau+y)=\lambda^{-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty} g(j\tau+y)$$

对任意$y\in[0,\tau)$成立，这里$\lambda=\sum_{j=1}^{m} y_j p_j$。

**证明** 如果取$\mu$是支撑在$\{y_1,\cdots,y_m\}$的概率测度，使对$j=1,\cdots,m$，$\mu(\{y_j\})=p_j$，则系 7.3 的结论正好是定理 7.2 的复述。$\{y_1,\cdots,y_m\}$与$\mu$的$\tau$-算术或非算术的定义正好相一致。 □

## 7.2 对分形的应用

设$q(r)$是自相似分形$E$在尺度$r$下的度量值，利用自相似性，对$r'>r$，可以写出用$q(r')$表示$q(r)$的关系式．利用变换可把这种关系转化为更新方程。由更新定理保证的解的极限性态正好与当$r\to 0$时，$q(r)$的性态相对应。

通过例子可很好地说明这一问题。设$\{F_1,\cdots,F_m\}$是迭代函数系，这里$F_i$是压缩比为$r_i$的压缩映射，$E\subset\mathbb{R}^n$是吸引子（见 2.2 节），则$E=\bigcup_{i=1}^{m}F_i(E)$，为了方便起见，设集的并是不交的。像定义式(2.1)－(2.3)一样，记$N(r)\equiv N_r(E)$为$E$的**覆盖数函数**，即直径为$r$的$E$的覆盖所包含的集的最少个数。已经知道这时盒维数$\underline{\dim}_B E=\overline{\dim}_B E=s$，这里$s$满足$\sum_{i=1}^{m} r_i^s=1$，见定理 2.7，因此$\lim_{r\to 0}\log N(r)/(-\log r)=s$，不难证明：对任意$r\leqslant 1$，存在$c_1,c_2>0$，使得$c_1 r^s\leqslant N(r)\leqslant c_2 r^s$。更新定理能使我们获得当$r$较小时的有关$N(r)$的更为精确的信息。回顾一下$f(r)\sim g(r)$的意义是：$\lim_{r\to 0} f(r)/g(r)=1$。

命题 7.4

设$E$是如上所述的自相似集,$N(r)$为$E$的覆盖数函数。如果$\{\log r_1^{-1},\cdots,\log r_m^{-1}\}$是非算术的,则存在$c>0$,使当$r\to 0$时,

$$N(r)\sim cr^{-s} \tag{7.30}$$

如果$\{\log r_1^{-1},\cdots,\log r_m^{-1}\}$是$\tau$-算术的,则$r\to 0$时

$$N(r)\sim r^{-s}p(-\log r) \tag{7.31}$$

这里$p$是一具有周期$\tau$的正函数。

**证明** 设$d=\min_{i\neq j}\mathrm{dist}(F_i(E),F_j(E))$, $N_i(r)$是直径为$r$的覆盖$F_i(E)$的集的最少个数。注意到,如果一个集的直径$r<d$,则该集最多只能与一个$F_i(E)$相交。但如果$r\geqslant d$,则该集可以与若干个$F_i(E)$相交。由此,可计算覆盖$E$所需的直径为$r$的集的个数:

$$N(r)=\sum_{i=1}^{m}N_i(r)-h(r)$$

这里,当$0<r<d$时,$h(r)=0$;而当$r\geqslant d$时,$h(r)\geqslant 0$。由于$F_i(E)$与$E$相似,相似比为$r_i$,故$N_i(r)=N(r/r_i)$,因此

$$N(r)=\sum_{i=1}^{m}N(r/r_i)-h(r) \tag{7.32}$$

这是反映$E$的自相似性的方程。见图7.2。用如下代换变换式(7.32),即令

$$r=\mathrm{e}^{-t};\ f(t)=\mathrm{e}^{-st}N(\mathrm{e}^{-t});\ g(t)=\mathrm{e}^{-st}h(\mathrm{e}^{-t}) \tag{7.33}$$

则

$$N(\mathrm{e}^{-t})=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{e}^{s\log r_i}\mathrm{e}^{-s\log r_i}N(\mathrm{e}^{-t-\log r_i})-h(\mathrm{e}^{-t})$$

两端乘以 $\mathrm{e}^{-st}$ 得

$$f(t)=\sum_{i=1}^{m}r_i^s f(t-\log r_i^{-1})-g(t) \tag{7.34}$$

这里$s=\dim_B E$,则$\sum_{i=1}^{m}r_i^s=1$,所以它是带有“时间” $y_i=\log r_i^{-1}$,“概

率"$p_i = r_i^s$的更新方程(7.29)。

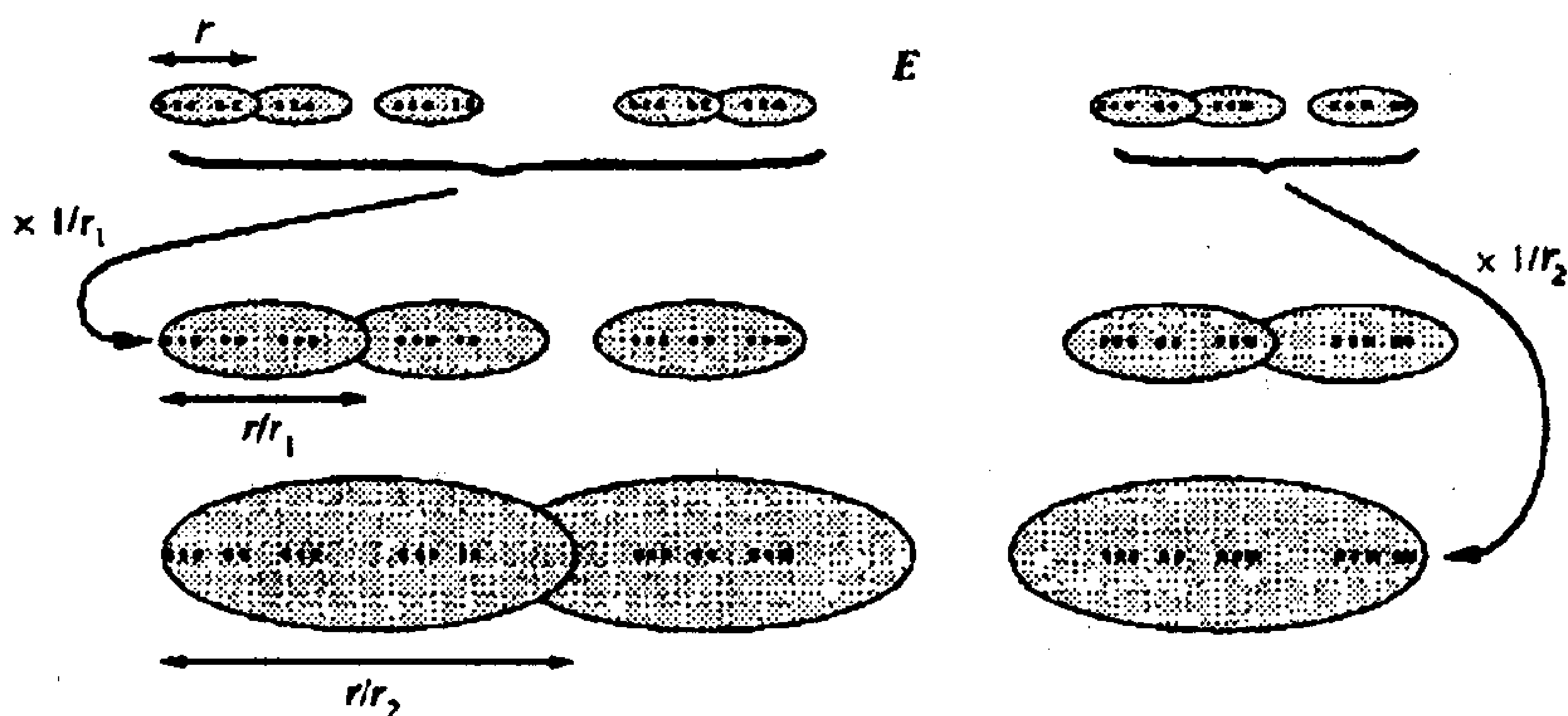



**图 7.2 图中的自相似集 $E$ 由相似比为 $r_1, r_2$ 两部分组成，把 $E$ 的左、右两部分，分别放大 $1/r_1$, $1/r_2$ 倍，可发现 $E$ 的 $r$-覆盖、$r/r_1$-覆盖及 $r/r_2$-覆盖之间的关系．由此得出关系式(7.32)**

由于 $N(r)$ 是整数值且是不降的．因而 $f$ 及 $h$ 有离散的不连续点集．由于当 $0<r<d$ 时，$h(r)=0$, 故 $t \geqslant -\log d$ 时，$g(t)=0$, 遗憾的是，当 $t \to -\infty$ 时，$g(t)$ 无界，所以按通常情况不能将更新定理用于式(7.34)．为了解决这一问题，修改 $f$ 和 $g$ 的定义如下：

$$f_0(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ f(t) & t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$g_0(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ g(t)-\sum\limits_{\{i: r_i<e^{-t}\}} r_i^s f(t-\log r_i^{-1}) & t \geqslant 0 \end{cases}$$

则对 $t \in \mathbb{R}$

$$f_0(t)=\sum_{i=1}^{m} r_i^s f_0(t-\log r_i^{-1})-g_0(t) \tag{7.35}$$

这里，如果 $t \notin [0, -\log \min\{r_1, \cdots, r_m, d\}]$, 则 $g_0(t)=0$。

由系 7.3 可推知：在非算术情形下，存在 $c>0$，使 $f(t)=f_0(t)\to c$；而在算术情形下 $f(t)$ 渐近于一正周期函数。由变换(7.33)的逆变换可推出式(7.30)和式(7.31)。 □

注意到式(7.30)中的常数 $c$ 是由更新定理通过 $g_0$ 得出的，因此，当 $r\to 0$ 时 $N(r)$ 的极限可用 $N(r)$ 在 $1\geqslant r\geqslant \min\{r_1,\cdots,r_m,d\}$ 范围上的值表示出来。而式(7.31)中的函数 $p$ 与此类似。由于 $\{\log r_1^{-1},\cdots,\log r_m^{-1}\}$"通常"是非算术的(即存在 $i\neq j$，使 $\log r_i^{-1}/\log r_j^{-1}$ 是无理数)，所以"通常"的结论是 $r^sN(r)$ 收敛于一极限值。式(7.31)的渐近周期性是一种"例外"的情况，虽然在相似比 $r_i$ 都相同的自相似集(如三分康托集)会出现这种情况。

为了获得更精确的渐近形式，下面考虑直线的子集。设 $E$ 是 $[0,1]$ 的自相似子集，它是由相似比为 $r_1,\cdots,r_m$ 的相似变换生成，并假定在变换的第一步，区间之间的间隙的长度为 $b_1,\cdots,b_{m-1}$。定义 $E$ 的间隙计数函数：

$$G(r)=\#\{E\text{ 的长度大于等于 } r \text{ 的补区间}\}$$

(这样，对于三分康托集，$r_1=r_2=b_1=1/3$，如果 $3^{-(k+1)}<r\leqslant 3^{-k}$，则 $G(r)=2^k-1$)。对于较小的 $r$，更新定理的方法适宜用于估计 $G(r)$。

**命题 7.5**

设 $E$ 是如上所述的 $[0,1]$ 的自相似子集。如果 $\{\log r_1^{-1},\cdots,\log r_m^{-1}\}$ 是非算术集，则 $r\to 0$ 时，

$$G(r)\sim\ r^{-s}s^{-1}\sum_{i=1}^{m}b_i^s/\ \sum_{i=1}^{m}r_i^s\ \log r_i^{-1} \tag{7.36}$$

如果 $\{\log r_1^{-1},\cdots,\log r_m^{-1}\}$ 是 $\tau$-算术的，则对任意 $\alpha>0$，当 $k\to\infty$ 时

$$G(\alpha\rho^k)\ \sim\ (\alpha\rho^k)^{-s}(1-\mathrm{e}^{-s\tau})^{-1}\sum_{i=1}^{m}\exp(s\log\alpha-s\tau\lfloor(\log b_i^{-1}$$

$$+\log\alpha)/\tau\rfloor\ )\ \times\left(\sum_{i=1}^{m}r_i^s\ \log r_i^{-1}\right)^{-1} \tag{7.37}$$

这里 $\rho=\mathrm{e}^{-\tau}$，而符号“$\lfloor x\ \rfloor$”表示“不超过 $x$ 的最大整数”。

**证明**　注意到对每个 $i$，$F_i(E)$ 这一部分上的每一间隙的长度等于 $E$ 的相应的间隙长度乘以 $r_i$，因此可以通过计算每一部分的间隙个数，再加上每部分之间的间隙个数来求出 $E$ 的间隙个数，则

$$G(r)=\sum_{i=1}^{m}G(r/r_i)+\#\{i:b_i\geqslant r\}$$

这一公式当 $r>0$ 时成立，且当 $r\geqslant 1$ 时，上式右边第二项变为0。做变换

$$r=\mathrm{e}^{-t};\quad f(t)=\mathrm{e}^{-st}G(\mathrm{e}^{-t});\quad g(t)=\mathrm{e}^{-st}\#\{i:b_i\geqslant \mathrm{e}^{-t}\}$$

则可得与式(7.34)类似的等式：

$$f(t)=\sum_{i=1}^{m}r_i^s\ f(t-\log r_i^{-1})+g(t) \tag{7.38}$$

这里当 $t\leqslant 0$ 时，$f(t)=g(t)=0$。取 $s=\dim_B E=\dim_H E$，则 $\sum_{i=1}^{m}r_i^s=1$，且 $|g(t)|\leqslant(m-1)\mathrm{e}^{-st}$。所以可直接将更新定理应用于式(7.38)。由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{m}\int_{-\log b_i}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{i=1}^{m}s^{-1}b_i^s$$

由系 7.3 得：

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=s^{-1}\sum_{i=1}^{m}b_i^s\Big/\sum_{i=1}^{m}r_i^s\ \log r_i^{-1}$$

再把上式变换回去，就得到式(7.36)。$\tau$-算术的情况可用同样的方法证明。□

命题 7.5 可用来推导 $E$ 的 $r$-邻域的勒贝格测度 $V(r)$ 的渐近形态。见 3.2 节。

**系 7.6**

设 $E$ 是如上所述的[0,1] 的自相似子集，假定$\{\log r_1^{-1},\cdots,\log r_m^{-1}\}$ 是非算术的，则当 $r\to 0$ 时

$$V(r)\sim r^{1-s}2^{1-s}(1-s)^{-1}s^{-1}\sum_{i=1}^{m}b_i^s\Big/\sum_{i=1}^{m}r_i^s\log r_i^{-1}$$

**证明** 这里只给出证明的梗概，需要的精确的估计可像式(3.17)那样较容易地补上。

$$V(r)=2r(G(2r)+1)+\sum\{|A|:A\text{ 是长度小于 }2r\text{ 的间隙}\}\tag{7.39}$$

这里 $G$ 是间隙计数函数。$G(r)\sim cr^{-s}$，而 $c$ 是式(7.36)中 $r^{-s}$ 的系数，于是

$$\begin{aligned}\sum\{|A|:A\text{ 是长度小于 }2r\text{ 的间隙}\}&=-\int_0^{2r}t\mathrm{d}G(t)\\&\sim cs\int_0^{2r}t^{-s}\mathrm{d}t\\&=cs(1-s)^{-1}(2r)^{1-s}\end{aligned}$$

由式(7.39)

$$\begin{aligned}V(r)&\sim c(2r)^{1-s}+cs(1-s)^{-1}(2r)^{1-s}\\&=c(2r)^{1-s}(1-s)^{-1}\end{aligned}$$

即为所证。 □

当然在算术的情况下有与系 7.6 类似的结论(是更复杂凌乱的公式)。

更新定理的方法可以应用于许多其它的集与量上。基本思想总是利用自相似性写出迭代关系，而后把它变换成更新方程，最

后应用更新定理。这种方法可用于具有较弱分离条件的集上，如开集条件，见练习 7.4。已导出的更新定理的更完善的形式可用于研究近似自相似集，如 cookie-cutter 集或保形迭代函数系的吸引子。

这一方法可用于考察反映自相似集的分形性质的各种不同量的无穷小极限。在 12.3 节中给出了对分形域上的热方程解的极限形式的应用实例。

## 7.3 注记与参考文献

更新定理的叙述可在许多概率论的教科书中找到，比如 Feller (1966) 或 Grimmett 与 Stirziker (1992)。更新定理的 Tauberian 证明可在 Rudin(1973) 的书中找到，用概率论方法的证明见 Lalley(1991)。其它证明见 Lindvall(1977) 及 Levitin 与 Vassiliev(1996)。

Lalley(1988,1991) 将更新理论用于分形的覆盖函数，这些论文中的第一篇处理了具有开集分离条件的自相似集。Kigami 与 Lapidus(1993) 和 Falconer(1995b) 把更新理论的方法用于自相似集的间隙计数函数以及 $r$- 邻域的长度。更新定理适用于非线性 IFS 吸引子(如 cookie -cutter 集)的一般情况见 Lalley(1989)，那里给出了许多应用例子。

## 练　习

7.1 在没有假设(7.11) 的条件下，证明命题 7.1。(注：需要多做一点工作来估计(7.12) 式中的和 $\sum_{k=0}^{m} e^{-s|t-y_1-\cdots-y_k|}$ 以获得像式(7.15) 和式(7.17) 的估计，而这可利用式(7.7) 做为 $\int\cdots\int \#\{k: a\leqslant y_1+\cdots+y_k\leqslant b\}\mathrm{d}\mu(y_1)\cdots\mathrm{d}\mu(y_m)$, $(a<b)$ 的界而得到。

7.2 在非算术的情形下，改写定理 7.2 的第一个证明。(现在“游

戏"要在实直线上进行，沿直线移动的距离由概率测度$\mu$确定。)

7.3 对三分康托集，详细求出$N(r)$，并验证式(7.31)成立，这里$p$是具有周期log3的周期(非常数值)函数。

7.4 设$E$是von Koch曲线，$N(r)$是$E$的覆盖数函数。证明$N(r)=4N(3r)-h(r)$，这里当$r<1/6$时，$|h(r)|\leqslant 6$。由此推出$N(r)\sim r^{-\log 4/\log 3}p(-\log r)$。这里$p$具有周期log3。从而更新理论的方法可用于不严格分离的自相似集。

7.5 设$E$是三分康托集，$\mu$是$\mathcal{H}^s$在$E$上的限制，$s=\log 2/\log 3$。定义$M(r)\equiv(\mu\times\mu)\{(x,y):|x-y|\leqslant r\}=\int\mu(B(x,r))\mathrm{d}\mu(x)$。证明$M(r)=\frac{1}{2}M(3r)+q(r)$，这里$q(r)=(\mu\times\mu)\{(x,y):\frac{1}{3}\leqslant|x-y|\leqslant r\}$。由此研究当$r\to 0$时，$M(r)$的性质。

7.6 设$E\subset\mathbb{R}^n$是IFS的自相似吸引子，其相似变换$\{F_1,\cdots,F_m\}$的相似比为$r_1,\cdots,r_m$，且每一部分$F_i(E)$互不相交。固定$x\notin E$，定义$N(r)=\#\{(i_1,\cdots,i_k):\operatorname{dist}(F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}x,E)\geqslant r\}$试研究当$r\to 0$时，$N(r)$的渐近形态。

# 第 8 章　鞅与分形

鞅收敛定理给出了保证随机变量或函数序列收敛的一般条件。在本章中，将证明这一定理，并给出这一定理在分形几何中的两种相当不同的应用。

## 8.1　鞅与收敛定理

虽然鞅收敛定理可表示为分析上的结果，并且的确下面的应用之一就是分析上的内容，但把鞅看作概率术语是更自然的。"鞅"这个词来源于经典的赌博名词（意思是每次输掉之后，再把赌注加倍），因而自然地把鞅直观地认为是关于赌博的内容。

赌徒同赌场进行一序列赌博，赌博在下列意义上是公平的，即无论赌注多大，输、赢的均值为 0。（因而下面的掷骰子游戏就属于这种情况。即赌博者在没有掷到 6 点时，输掉其赌注；而在出现 6 点时，赢得其赌注 6 倍的钱。）如果赌博者 $k$ 次赌博之后的赌本用随机变量 $Y_k$ 表示，则赌博的公正性要求 $Y_{k+1}$ 的期望值等于 $Y_k$，而与赌注多大以及以前的输赢无关。鞅收敛定理的一个版本是：如果对于所有的 $k$，$Y_k \geqslant 0$（即赌博者不允许欠债），则以概率 1，$Y_k$ 收敛于随机变量 $Y$，而 $Y$ 满足 $\mathsf{E}(Y) \leqslant \mathsf{E}(Y_0)$，这里 $Y_0$ 是初始赌本，$\mathsf{E}$ 表示数学期望。（在赌博例子中 $Y$ 等于 0 的概率很大，即使赌博者极为小心，$Y>0$ 也仅只有正的概率）。无论赌博者使用何种"系统"来确定其第 $k$ 次的赌注（可以依据前 $k-1$ 次赌博的输赢而定。），$Y_k$ 几乎必然收敛于一最终值 $Y$，而 $Y$ 的期望不超过初始赌本。特别，这意味着不存在任何一种赌博系统能使赌博者获得利润。

与此类似的想法大量地存在于概率分析中。下面从样本空间 $\Omega$ 开始，$\mathcal{F}$ 是其上的事件 $\sigma$-域（即 $\mathcal{F}$ 对可数并、交以及取补运算

是封闭的)。在其上定义概率测度P。设 $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}$ 是一列非降的事件 $\sigma$-域,并且假定 $\mathcal{F}$ 是包含所有 $\mathcal{F}_k$ 的最小 $\sigma$-域。对于 $k=0,1,2,\cdots$ 设 $Y_k$ 是 $\mathcal{F}_k$ 上的随机变量。称 $Y_k$ 或更准确地 $(Y_k, \mathcal{F}_k)$ 是鞅,如果对于任意的 $k=0, 1, 2, \cdots$

$$\mathrm{E}(|Y_k|) < \infty \tag{8.1}$$

且

$$\mathrm{E}(Y_{k+1} | \mathcal{F}_k) = Y_k \tag{8.2}$$

条件(8.2),即 $Y_{k+1}$ 对 $\mathcal{F}_k$ 的条件期望等于 $Y_k$ ,其基本意义是:无论过程的前 $k$ 步发生了什么,$Y_{k+1}$ 的期望总是等于 $Y_k$ 。
[注:在技术上,关于对 $\sigma$-域的条件期望的测度论的定义是相当复杂的。但对本书来说把 $\mathrm{E}(Y_{k+1} | \mathcal{F}_k)$ 看成是在已知 $Y_0, \cdots, Y_k$ 的条件下计算出来的 $Y_{k+1}$ 的平均值就足够了。下面将用到的条件期望的性质在这种意义的解释下是很自然的。]

在赌博的例子中,$\mathcal{F}_k$ 代表前 $k$ 步所有可能收入的集合。则式(8.2)的意义就是:无论赌博的前 $k$ 步发生了什么,赌博者在第 $k+1$ 次赌博之后的赌本 $Y_{k+1}$ 的平均值等于赌博之前的赌本 $Y_k$ 。这反映了游戏的公平性。

由式(8.2)可得到无条件期望

$$\mathrm{E}(Y_{k+1}) = \mathrm{E}(Y_k) \tag{8.3}$$

即在不知道以前发生了什么情况的条件下,$Y_{k+1}$ 的平均值与 $Y_k$ 的平均值相同。

很多定理在条件(8.2)变弱为不等式时就能成立。设对于 $k=0,1,2,\cdots$,$\mathrm{E}(|Y_k|) < \infty$,称 $(Y_k, \mathcal{F}_k)$ 是上鞅,如果

$$\mathrm{E}(Y_{k+1} | \mathcal{F}_k) \leqslant Y_k \tag{8.4}$$

称 $(Y_k, \mathcal{F}_k)$ 是下鞅,如果

$$\mathrm{E}(Y_{k+1} | \mathcal{F}_k) \geqslant Y_k \tag{8.5}$$

(从而,在上鞅的情况下,对赌场有利;而在下鞅的情况下,对赌博者有利。)

当函数序列定义在嵌套集上时，鞅可看作是分析上的方法而不是概率上的。一种简单的情况可用图形直观表示，见图 8.1。设 $E$ 是一集合，$\mu$ 是 $E$ 上的有限波雷尔测度，$C_0, C_1, \cdots$ 是由 $E$ 的具有正测度的不交子集构成的有限集类，并且对于每个 $k$，$E = \bigcup\{A \in C_k\}$，而且 $C_k$ 中任一集合均为 $C_{k+1}$ 中集的不交并。设 $\mathcal{F}_k$ 是由 $C_k$ 生成的 $\sigma$ - 域，在这种情况下，它是由 $C_k$ 中的集通过求并运算而得到的有限集族。对于 $k=0,1,2,\cdots$ 设

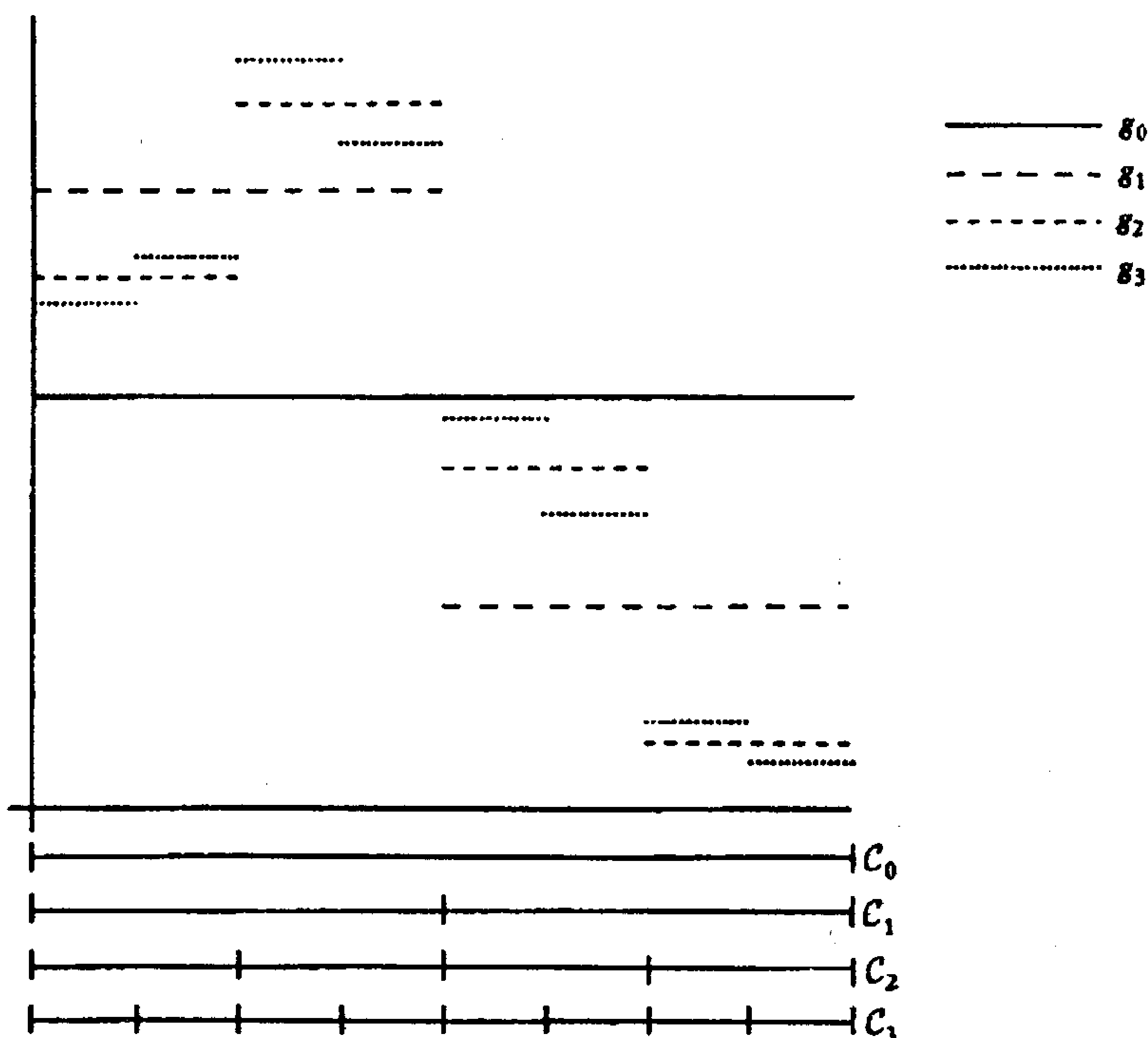



图 8.1 函数序列 $\{g_k\}$ 是一个鞅，$g_k$ 在 $C_k$ 的每个区间上是一常数，并且对任意 $x \in A$，$g_k(x)$ 等于 $g_{k+1}$ 在 $C_k$ 的一个区间 $A$ 上的平均值

$g_k$: $E \to [0, +\infty)$ 按如下方式定义：对任意 $A \in C_k$

$$g_k(x)\text{ 为常数，当 } x\in A \tag{8.6}$$

且

$$g_k(x)=\mu(A)^{-1}\int_A g_{k+1}(y)\mathrm{d}\mu(y) \tag{8.7}$$

当 $x\in A$ 即 $g_k$ 在 $C_k$ 中的集 $A$ 的任一点处的值等于 $g_{k+1}$ 在 $A$ 上的平均值。

这里用分析的方法解释概率概念，用函数代替了随机变量；用积分代替了期望。条件(8.6)说明 $g_k$ 是 $\mathcal{F}_k$- 可测的；而式(8.7)则是鞅的条件(8.2)。因此可以认为$(g_k,\mathcal{F}_k)$是鞅。

为什么鞅和上鞅是重要的？其主要原因是在非常弱的假设下，它们以概率1收敛(或者用分析的术语来说—几乎处处收敛)。鞅收敛定理的标准证明是借助上交叉的概念。固定两个数 $a<b$，考虑区间$[a,b]$的上交叉数，即 $Y_k$ 从小于 $a$ 变化为超过 $b$ 的变化次数。更正规地，定义到时刻 $n$ 为止，由 $Y_k$ 产生的$[a,b]$的上交叉数 $U_n$ 为满足下列条件的最大整数 $M$: 如果存在整数 $R_i$， $S_i$ 使

$$0\leqslant R_1<S_1<R_2<S_2<\cdots<R_M<S_M\leqslant n \tag{8.8}$$

并且对所有 $1\leqslant i\leqslant M$

$$Y_{R_i}<a\ ,\quad Y_{S_i}>b$$

设随机整数 $S_i$和 $R_i$是如此选取的: $S_i$是大于$R_i$的最小整数，而 $R_i$是大于 $S_{i-1}$ 的最小整数，由此可保证式(8.8)成立。

鞅收敛定理证明的关键是下面的关于上交叉数期望的界。

**命题 8.1 (上交叉引理)**

设 $Y_k$ 是上鞅，$U_n$ 是到时刻 $n$ 区间$[a,b]$的上交叉数，则

$$\mathrm{E}(U_n)\leqslant\frac{\mathrm{E}(|Y_n|)+|a|}{b-a} \tag{8.9}$$

**证明** 定义新的过程 $Z_k$，它“尾随” $Y_k$。在赌博的例子中，我们把 $Z_k$ 看作第二个赌博者乙在 $k$ 次赌博之后的赌本(允许是负的)，乙

的每局赌注以下述方式依赖于甲(赌博者甲如前所述，其赌本为 $Y_k$)。赌博者乙的初始赌本 $Z_0=0$, 并且乙在甲的赌本首次小于 $a$ 的时刻 $R_1$ 之前不参与赌博。从时刻 $R_1$ 起，乙开始下注，其赌注与甲相同，直到甲的赌本超过 $b$ 之时 $S_1$ 为止，然后停止下注。当甲的赌本再次低于 $a$ 时，乙又开始下注，赌注大小与甲相同，直到甲的赌本再一次超过 $b$, 如此下去，见图 8.2。正常情况下，不能有许多上交叉，否则乙的尾随于甲的系统将导致一个不可思议的利润。在数学上对于式(8.8) 中的上交叉，定义

$$Z_{k+1}=\begin{cases} Z_k & (\text{如果 } 0\leqslant k<R_1 \text{ 或 } S_i\leqslant k<R_{i+1}) \\ Z_k+Y_{k+1}-Y_k & (\text{如果 } R_i\leqslant k<S_i) \end{cases} \tag{8.10}$$

(第一种情况是乙“钉住”, 第二种情况乙的赢得与甲相同。) 由于 $Y_k$ 是上鞅，由式(8.10) 和(8.4) 得：

$$\mathrm{E}(Z_{k+1}|\mathcal{F}_k)=\begin{cases} Z_k & (\text{如果 } 0\leqslant k<R_1 \text{ 或 } S_i\leqslant k<R_{i+1}) \\ Z_k+\mathrm{E}(Y_{k+1}|\mathcal{F}_k)-Y_k & (\text{如果 } R_i\leqslant k<S_i) \end{cases}$$
$$\leqslant Z_k$$

(这说明无论以前的赌博收入是多少，乙在每次赌博之后的期望赌本最多是这次赌博之前的赌本。乙所使用的系统，尽管利用了甲，但仍然不能产生期待的利润。) 取无条件期望，则有 $\mathrm{E}(Z_{k+1})\leqslant \mathrm{E}(Z_k)$, 因此 $\mathrm{E}(Z_n)\leqslant \mathrm{E}(Z_0)=0$。

由于对$[a, b]$ 的每一个上交叉 $Z_k$ 至少增加 $b-a$, 所以

$$Z_n\geqslant (b-a)U_n+\min\{0,\ Y_n-a\} \tag{8.11}$$

(上式中的第二项是考虑到 $Y_n$ 在时刻 $n$ 小于 $a$ 的可能性) 对式(8.11)取无条件期望，得

$$\begin{aligned} 0\geqslant \mathrm{E}(Z_n) &\geqslant (b-a)\mathrm{E}(U_n)+\mathrm{E}(\min\{0,\ Y_n-a\}) \\ &\geqslant (b-a)\mathrm{E}(U_n)+\mathrm{E}(-|Y_n|-|a|) \end{aligned}$$

由此可得式(8.9)。 □

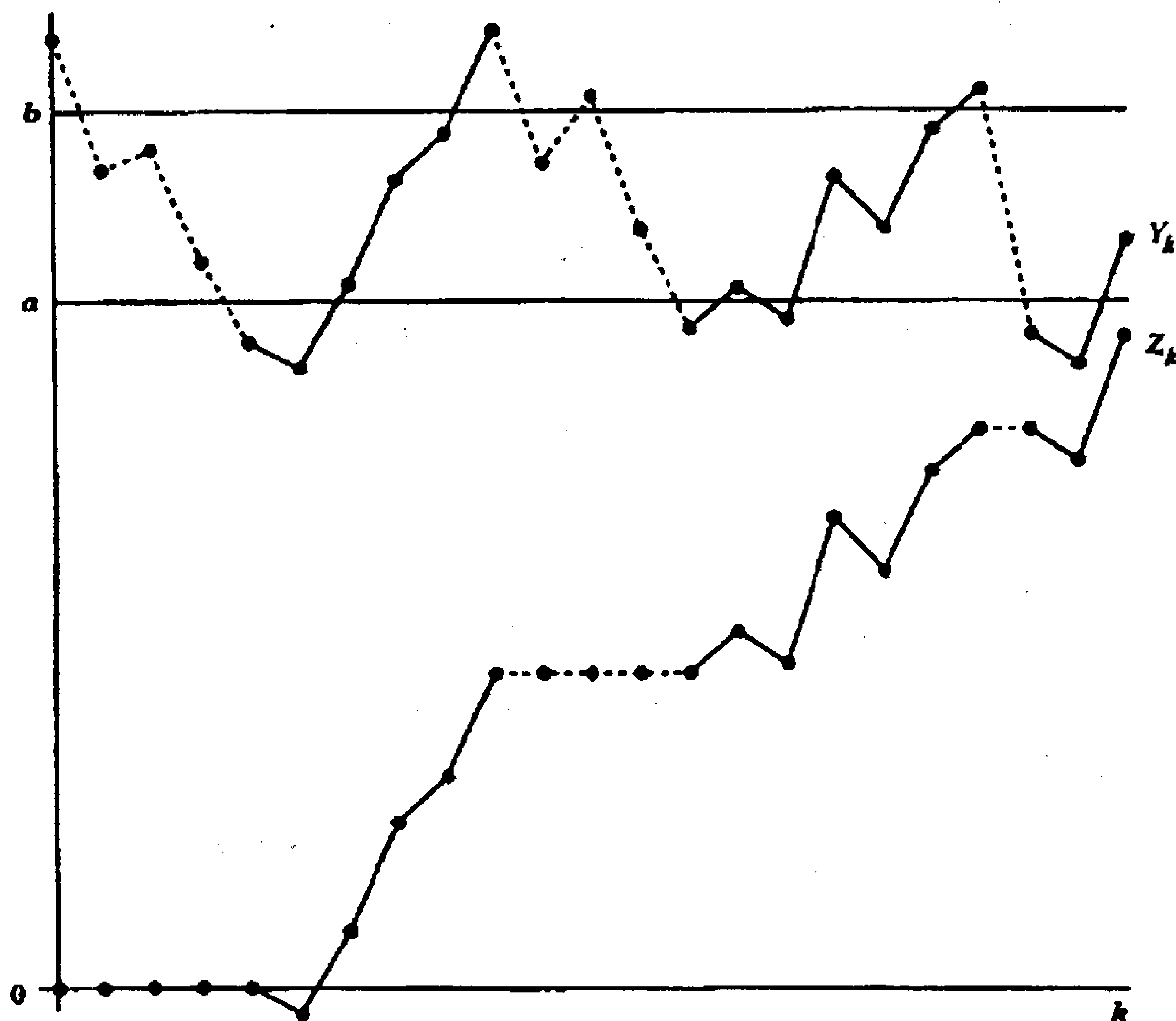



图 8.2 上交叉引理的证明. 赌博者乙($k$次赌博之后的赌本为$Z_k$)在赌博者甲(其赌本为$Y_k$)"上交叉"时下注，图中以实线表示. 上交叉序列为乙带来了利润. 如果上交叉经常出现，这将意味着乙有一个"赢的系统"，但在鞅或上鞅的情况下，这是不可能的

现在可以容易地得出上鞅收敛定理。

**定理 8.2 (上鞅收敛定理)**

设 $Y_k$ 是鞅或上鞅，且

$$\sup_k \mathrm{E}(|Y_k|) < \infty \tag{8.12}$$

则存在随机变量(即 P- 可测函数)$Y$, 使得 $Y_k \to Y$, $a.s$, 进而

$\mathrm{E}(|Y|)\leqslant\lim_{k\to\infty}\inf\mathrm{E}(|Y_k|)$。因此 $|Y|<\infty$, $a.s.$

**证明** 由命题 8.1 以及式(8.12) 知：对每对有理数 $a<b$，随机变量 $Y_k$ 以概率 1 产生有限次$[a,b]$的上交叉。由于有可数多个有理数对，因而以概率 1，随机变量 $Y_k$ 在每个有理区间$[a,b]$发生有限次上交叉。如果一个实数序列$\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$不收敛，则可找到有理数 $a$，$b$，使 $\liminf_{k\to\infty} y<a_k<b<\limsup_{k\to\infty} y_k$，特别地有$\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$在$[a,b]$发生无穷多次上交叉。由此可得结论：$Y_k$ 以概率 1 收敛。定义 $Y\equiv\liminf_{k\to\infty} Y_k$，则 $Y_k\to Y$ $a.s$ 。由 Fatou 引理 $\mathrm{E}(|Y|)=\mathrm{E}(\liminf_{k\to\infty}|Y_k|)\leqslant\liminf_{k\to\infty}\mathrm{E}(|Y_k|)\leqslant\sup_k\mathrm{E}(|Y_k|)<\infty$ 所以 $|Y|<\infty$ $a.s$ 。 □

下面的应用将考虑非负(上)鞅(即对任意 $k$，$Y_k\geqslant0$)对此有下列的推论。

**系 8.3**

给定非负上鞅 $Y_k$，则存在非负随机变量 $Y$，使 $Y_k$ 几乎必然收敛于 $Y$。而且 $0\leqslant\mathrm{E}(Y)\leqslant\inf_k\mathrm{E}(Y_k)$。

**证明** 由于对任意 $k$，$0\leqslant\mathrm{E}(|Y_k|)=\mathrm{E}(Y_k)\leqslant\mathrm{E}(Y_0)<\infty$，由定理 8.2即得所要结论。 □

定理 8.2 或系 8.3 这种形式的鞅收敛定理有一个缺点，即可能会出现这种情况：非负鞅 $Y_k$，对任意 $k$，$\mathrm{E}(Y_k)=\mathrm{E}(Y_0)>0$ 成立，但极限 $Y$ 却几乎处处为 0。在许多应用问题当中需要得到至少有正的概率使 $Y>0$ 的结论。因此现在增加条件来保证这个性质成立。

鞅 $Y_k$ 称为是 $L^2$-有界鞅，如果

$$\sup_{0\leqslant k<\infty}\mathrm{E}(Y_k^2)<\infty \tag{8.13}$$

**系 8.4**

设 $Y_k$ 是 $L^2$-有界鞅，则存在随机变量 $Y$，使 $Y_k\to Y$, a.s 且当 $k\to\infty$ 时 $\mathrm{E}(|Y-Y_k|)\leqslant\mathrm{E}((Y-Y_k)^2)^{\frac{1}{2}}\to 0$，
特别，对任意$k$，$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(Y_k)$。

**证明** 注意到，如果 $j>k$，则 $\mathrm{E}(Y_jY_k|\mathcal{F}_k)=\mathrm{E}(Y_j|\mathcal{F}_k)Y_k=Y_k^2$，取无条件期望，$\mathrm{E}(Y_jY_k)=\mathrm{E}(Y_k^2)$，于是对 $m\geqslant 1$

$$\sum_{j=1}^{m}(\mathrm{E}(Y_j-Y_{j-1})^2)=\sum_{j=1}^{m}(\mathrm{E}(Y_j^2)-2\mathrm{E}(Y_jY_{j-1})+\mathrm{E}(Y_{j-1}^2))$$

$$=\sum_{j=1}^{m}(\mathrm{E}(Y_j^2)-\mathrm{E}(Y_{j-1}^2))$$

$$=\mathrm{E}(Y_m^2)-\mathrm{E}(Y_0^2)$$

所以由式(8.13)知 $\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{E}((Y_j-Y_{j-1})^2)<\infty$。同理，当 $m>k$ 时

$$\mathrm{E}((Y_m-Y_k)^2)=\mathrm{E}(Y_m^2)-\mathrm{E}(Y_k^2)=\sum_{j=k+1}^{m}\mathrm{E}((Y_j-Y_{j-1})^2)$$

令 $m\to\infty$，由 Fatou 引理，当 $k\to\infty$ 时

$$\mathrm{E}((Y-Y_k)^2)\leqslant\sum_{j=k+1}^{\infty}\mathrm{E}((Y_j-Y_{j-1})^2)\to 0$$

利用哥西—许瓦兹不等式

$$|\mathrm{E}(|Y|)-\mathrm{E}(|Y_k|)|\leqslant\mathrm{E}(|Y-Y_k|)\leqslant\mathrm{E}((Y-Y_k)^2)^{\frac{1}{2}}\to 0$$

由于 $Y_k$ 是鞅，由式(8.3)知 $\mathrm{E}(Y_k)$ 是常数，因而命题得证。□

可以把鞅收敛定理改写成分析的形式，以得出函数序列几乎处处收敛的条件。

**系 8.5**

对 $k=0,1,2,\cdots$，设 $C_k$ 是如上所述具有正测度的不交波雷尔集的有限集类，再设 $g_k$: $E\to[0,\infty)$ 满足式(8.6)及式(8.7)。则存在

(波雷尔可测)函数 $g:E\to[0,\infty)$ 使对 $\mu$-几乎所有 $x\in E$, $g_k(x)\to g(x)$。

**证明** 这一命题正是系 8.3 的分析表达。条件(8.6) 保证 $g_k$ 是 $\mathcal{F}_k$-可测，这里 $\mathcal{F}_k$ 是由 $C_k$ 生成的 $\sigma$-代数。式(8.7) 表明 $g_{k+1}$ 在 $A$ 上的平均值是 $g_k(x)$, 而这正是式(8.2), 由系 8.3 知 $g_k(x)$ $\mu$-几乎处处收敛。□

## 8.2 随机剪切集

人们已经提出了大量的随机分形结构,见FG15.1节。经常可以利用鞅方法来分析随机分形。通常的作法是:把随机集上的随机测度定义为与分形结构相关联的测度序列的极限,然后利用鞅来推导极限测度的性质。在这里是要找出一个随机分形的维数,该分形是把单位区间去掉一序列长度递减的随机区间而得到。(注意这种结构与3.2节中结构不同之处在于去掉的区间可以是重叠的。)

设 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是给定的满足 $0<a_k<\frac{1}{2}$ 的收敛于 0 的递减数列。再设 $A_1,A_2,\cdots$ 是[0,1] 的随机开子区间序列, $A_k$ 的长度为 $a_k$, 区间 $A_k$ 的中点独立地均匀分布于[0,1]。把区间[0,1] 的两个端点认为是一样的将是方便的，即如果 $A_k$ 的中心在 $x$ 处，而 $0\leqslant x<\frac{1}{2}a_k$(相应地 $1-x<\frac{1}{2}a_k\leqslant 1$), 则 $A_k$ 是由两端的两个区间组成: $A_k=[0,x+\frac{1}{2}a_k)\cup(1-\frac{1}{2}a_k+x,1]$ (相应地 $A_k=[0,x+\frac{1}{2}a_k-1)\cup(x-\frac{1}{2}a_k,1]$)。通过“切掉”区间 $A_k$ 定义随机闭集序列 $E_k$, 即 $E_0=[0,1]$, $E_k=E_{k-1}\setminus A_k$, $k=1,2,\cdots$, 则切割集

$$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k=[0,1]\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k \tag{8.14}$$

是一随机闭集, 见图 8.3。容易看出: 如果 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k<\infty$ 则 $\mathcal{L}(E)>0$ (这里 $\mathcal{L}$ 是勒贝格测度或“长度”) 具有正概率; 如果 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\infty$, 则

几乎必然有 $\mathcal{L}(E)=0$。下面考虑一种重要的情形：对 $0<t<1$，存在常数 $t$，使当 $k\to\infty$ 时

$$a_k \sim \frac{t}{k} \tag{8.15}$$

下面将证明：在这种情况下，只要 $E$ 是非空的，则它一般是分形。并将证明：以概率1，$E$ 的豪斯道夫维数最多是 $1-t$，并且通常就是 $1-t$。

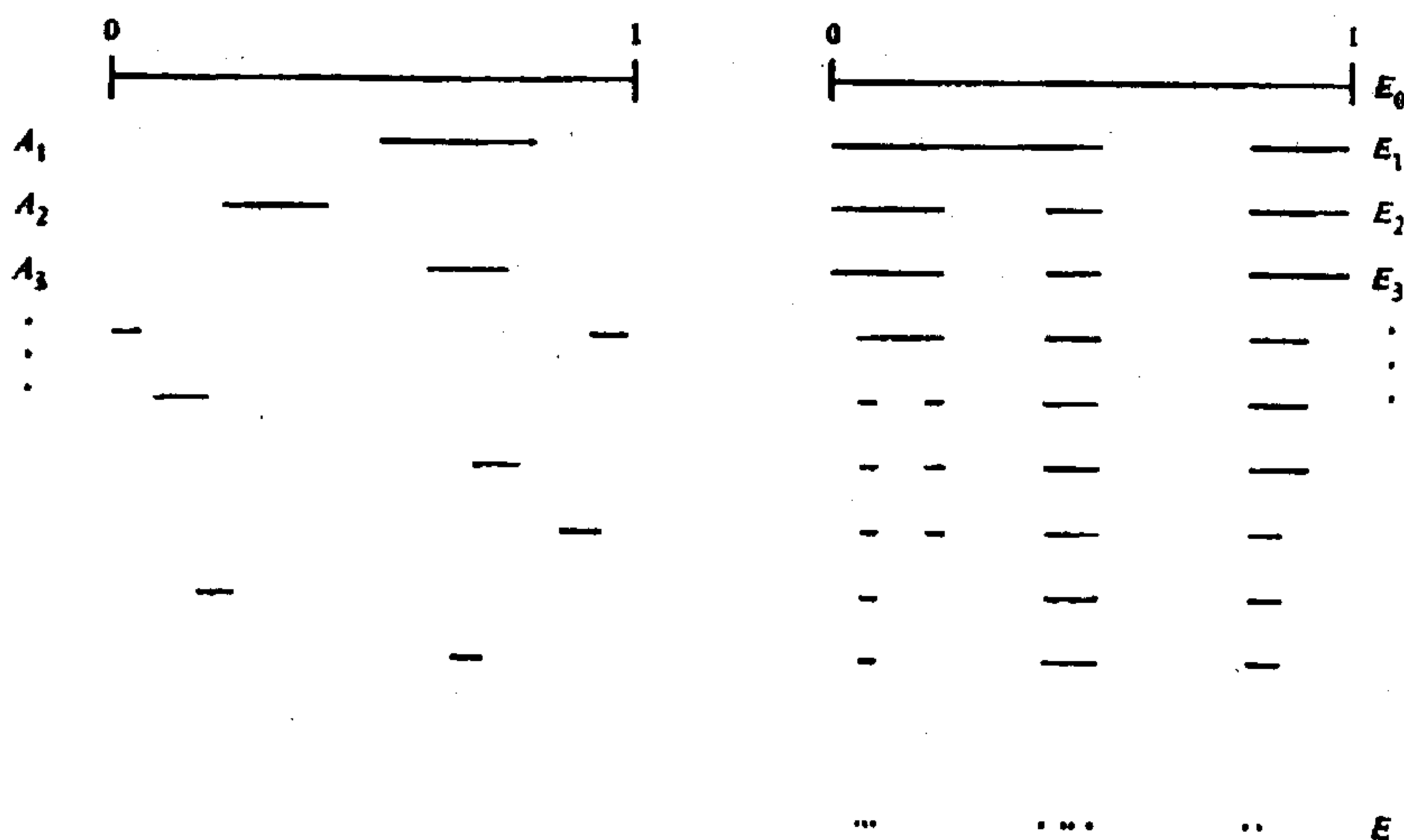



**图 8.3　随机剪切集 $E$ 的构造是反复去掉随机区间而得到．图中左边显示的区间序列是为了形成右边的集而被切掉的部分**

首先来估计一个给定的点以及一对给定的点属于 $E_k$ 的概率．显然对任意 $x\in[0,1]$，$\mathrm{P}(x\in A_i)=a_i$。定义

$$p_k \equiv \prod_{i=1}^{k}(1-a_i) \qquad k=1,2,\cdots \tag{8.16}$$

下面的计算依赖于对这个乘积的估计。由于 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i=\infty$，所以

$$\log p_k = \sum_{i=1}^{k} \log(1-a_i) \sim -\sum_{i=1}^{k} a_i \sim -\sum_{i=1}^{k} t/i \sim -t\log k \tag{8.17}$$

于是由式(8.15)知，

$$\log p_k \sim -t\log k \sim t\log a_k \tag{8.18}$$

对于 $x,y\in[0,1]$，记 $d(x,y)=\min\{|x-y|,\ 1-|x-y|\}$，即把 0 和 1 看作相同的点时，$x$ 与 $y$ 之间的距离。

**引理 8.6**

(a) 对任意 $x\in[0,1]$ 及 $k=1,2,\cdots$

$$\mathrm{P}(x\in E_k)=\prod_{i=1}^{k}(1-a_i)=p_k \tag{8.19}$$

(b) 给定 $\varepsilon>0$，存在 $c>0$，使得

$$\frac{\mathrm{P}(x\in E_k \text{ 且 } y\in E_k)}{p_k^2} \leqslant c\, d(x,y)^{-t(1+\varepsilon)} \tag{8.20}$$

对任意 $x,y\in[0,1]$ 及 $k=1,2,\cdots$ 成立。

**证明** $x\in E_k$，当且仅当对所有的 $i=1,\cdots,k$，$x\notin A_i$。由于事件 $(x\notin A_i)_{i=1}^{k}$ 是相互独立的，所以

$$\mathrm{P}(x\in E_k)=\prod_{i=1}^{k}\mathrm{P}(x\notin A_i)=\prod_{i=1}^{k}(1-a_i)=p_k$$

给定 $\varepsilon>0$，由式(8.18)知，存在 $c_1>0$ 使对任意 $k=1,2,\cdots$

$$\prod_{j=1}^{k}(1-a_j)=p_k\geqslant c_1 a_k^{t(1+\varepsilon)} \tag{8.21}$$

考虑当 $x,y$ 均不属于 $A_j$ 时，$A_j$ 的位置，并利用 $A_j$ 的中点服从均匀分布，则

$$\mathrm{P}(x\notin A_j \text{ 且 } y\notin A_j)=\begin{cases} 1-a_j-d(x,y)\leqslant 1-a_j & \text{当 } a_j\geqslant d(x,y) \\ 1-2a_j\leqslant(1-a_j)^2 & \text{当 } a_j<d(x,y) \end{cases}$$

所以

$$\frac{\mathrm{P}(x\notin A_j\text{ 且 }y\notin A_j)}{(1-a_j)^2}\leqslant\begin{cases}(1-a_j)^{-1} & \text{当 } a_j\geqslant d(x,y)\\ 1 & \text{当 } a_j<d(x,y)\end{cases}$$

因而由切割的集的独立性，对满足式(8.21)合适的 $c_1$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{P}(x\in E_k\text{ 且 }y\in E_k)}{p_k^2}&=\prod_{j=1}^{k}\frac{\mathrm{P}(x\notin A_j\text{ 且 }y\notin A_j)}{(1-a_j)^2}\\&\leqslant\prod_{j:a_j\geqslant d(x,y)}(1-a_j)^{-1}\\&=(p_{j(d(x,y))})^{-1}\\&\leqslant c_1^{-1}a_{j(d(x,y))}^{-t(1+\varepsilon)}\end{aligned}$$

其中 $j(d(x,y))$ 是使得 $a_j\geqslant d(x,y)$ 的最大整数 $j$。由式(8.15)知，$a_{k+1}/a_k\to1$, 因此 $a_{j(d(x,y))}\sim d(x,y)$, 即知式(8.20)对合适的常数 $c>0$ 成立。□

以 $1_{E_k\times E_k}$ 为 $E_k\times E_k$ 的示性函数，则不等式(8.20)可写成

$$\begin{aligned}p_k^{-2}\mathrm{E}(1_{E_k\times E_k}(x,y))&=p_k^{-2}\mathrm{P}(x\in E_k\text{ 且 }y\in E_k)\\&\leqslant c\,d(x,y)^{-t(1+\varepsilon)}\end{aligned}\tag{8.22}$$

下面引入随机测度序列 $\mu_k=p_k^{-1}\mathcal{L}|_{E_k}$, 即勒贝格测度在 $E_k$ 上的限制再乘以因子 $p_k^{-1}$。从而对集合 $A$,

$$\mu_k(A)=p_k^{-1}\mathcal{L}(A\cap E_k)$$

以下将使用鞅收敛定理来证明：$\mu_k$ 以概率1收敛于一随机测度 $\mu$。回顾一下，二进区间是 $[p2^{-m},(p+1)2^{-m})$ 这种形式的区间，其中 $m,p$ 是整数。

### 引理 8.7

以概率1存在支撑在 $E$ 上的，满足 $0\leqslant\mu(E)<\infty$ 的波雷尔测度 $\mu$, 使对每个集 $A$, $\mu_k(A)\to\mu(A)$, 其中 $A$ 是二进区间的有限并，而且 $\mu(E)>0$ 有正概率。

**证明** 记 $\mathcal{F}_k$ 是由 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的中点的随机位置为基础的 $\sigma$-域。(形式上，$\mathcal{F}_k$ 是由[0,1]的波雷尔子集的 $k$-重乘积生成的 $\sigma$-域。)对每个二进区间 $A$，由独立性得：

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\mu_{k+1}(A)|\mathcal{F}_k) &= \mathsf{E}(p_{k-1}^{-1}\mathcal{L}(A\cap E_k\cap([0,1]\backslash A_{k+1}))|\mathcal{F}_k)\\ &= p_{k+1}^{-1}\mathcal{L}([0,1]\backslash A_{k+1})\mathcal{L}(A\cap E_k)\\ &= p_{k+1}^{-1}(1-a_{k+1})p_k\mu_k(A)\\ &= \mu_k(A)\end{aligned}$$

所以对每个二进区间 $A$，$\mu_k(A)$ 是非负鞅。由系 8.3 知：存在随机变量 $\mu(A)$，使得以概率 1，对可数多个二进区间中的每个区间 $A$，$\mu_k(A)\to\mu(A)$ 成立。以通常的方式把 $\mu$ 扩张为支撑在 $E$ 上的波雷尔测度，由可加性，对于二进区间的有限并 $A$，也成立 $\mu_k(A)\to\mu(A)$。(事实上，几乎必然这一收敛对于任意的波雷尔集成立。)

现在考虑$(\mu_k[0,1])^2$，利用式(8.22)

$$\begin{aligned}\mathsf{E}((\mu_k[0,1])^2) &= p_k^{-2}\mathsf{E}(\mathcal{L}(E_k)^2)\\ &= p_k^{-2}\mathsf{E}((\mathcal{L}\times\mathcal{L})(x,y): x\in E_k \text{ 且 } y\in E_k)\\ &= p_k^{-2}\mathsf{E}\left(\iint 1_{E_k\times E_k}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\ &\leqslant c\int_0^1\int_0^1 d(x,y)^{-t(1+\varepsilon)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty\end{aligned}$$

这里选取 $\varepsilon$ 使得 $t(1+\varepsilon)<1$。(注意 $d(x,y)^{-1}$ 象 $|x-y|^{-1}$ 一样，当 $x$ 接近 $y$ 时出现奇异值)于是 $\mu_k[0,1]$ 是 $L^2$-有界鞅，由系 8.4，$\mathsf{E}(\mu(E))=\mathsf{E}(\mu[0,1])=\mathsf{E}(\mu_0[0,1])=1$，由此得到 $\mathsf{P}(\mu(E)>0)>0$。□

**命题 8.8**

对于随机剪切集 $E$，以概率 1，$\dim_H E\leqslant\overline{\dim}_B E\leqslant 1-t$，并以正概率使 $1-t\leqslant\dim_H E$。

**证明**　给定 $\delta$, 令 $k(\delta)$ 是使得 $a_k=|A_k|>2\delta$ 的最大整数 $k$。注意到，如果 $x\in E_\delta$, 这里 $E_\delta$ 是 $E$ 的 $\delta$-邻域，并且 $j\leqslant k(\delta)$, 则 $x\notin A_j^-$, 这里 $A_j^-$是与 $A_j$具有相同中点，长度为 $a_j-2\delta$的开区间。由剪切的独立性，对任意 $x\in[0,1]$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(x\in E_\delta)&\leqslant \mathrm{P}(x\notin A_j^- \text{ 任意 } j=1,\cdots,k(\delta))\\
&\leqslant \prod_{j=1}^{k(\delta)}\mathrm{P}(x\notin A_j^-)\\
&\leqslant \prod_{j=1}^{k(\delta)}(1-(a_j-2\delta))
\end{aligned}
\tag{8.23}
$$

但当 $\delta\to 0$时，利用式(8.17) 及 $t/k(\delta)\sim a_{k(\delta)}\sim 2\delta$( 由式(8.15) 及 $a_{k+1}/a_k\to 0$),

$$
\begin{aligned}
\log\prod_{j=1}^{k(\delta)}(1-(a_j-2\delta))&\leqslant -\sum_{j=1}^{k(\delta)}(a_j-2\delta)\\
&= -\sum_{j=1}^{k(\delta)}a_j+2\delta k(\delta)\\
&\sim -t\log k(\delta)+2\delta k(\delta)\\
&\sim t\log\delta+t
\end{aligned}
\tag{8.24}
$$

再由式(8.23) 即得：对给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $c$, 对任意 $\delta\leqslant 1$

$$\mathrm{E}(\mathcal{L}(E_\delta))=\mathrm{P}(x\in E_\delta)\leqslant c\delta^{t-\varepsilon}$$

所以

$$\mathrm{E}\left(\sum_{\delta=2^{-k}:k=1,2,\cdots}\mathcal{L}(E_\delta)\delta^{-t+2\varepsilon}\right)\leqslant c\sum_{\delta=2^{-k}:k=1,2,\cdots}\delta^{\varepsilon}<\infty$$

于是可以得到结论：以概率1, $\sum_{\delta=2^{-k}:\ k=1,2,\cdots}\mathcal{L}(E_\delta)\delta^{-t+2\varepsilon}<\infty$ 所以 $\mathcal{L}(E_\delta)\delta^{-t+2\varepsilon}$ 对 $2^{-k}$ 这种形式的 $\delta$ 有界，因此，对任意的 $0<\delta<1$ 有界(由于 $\mathcal{L}(E_\delta)$ 关于 $\delta$ 是非降的)。由式(2.5)得

$\overline{\dim}_B E \leqslant 1-t+2\varepsilon$。因为 $\varepsilon>0$ 是任意的，即知，以概率 1 $\overline{\dim}_B E \leqslant 1-t$。

对于下界，可以利用位势理论来计算。设 $\varepsilon>0$, $\mu_k$, $\mu$ 是如上所述的 $E_k$ 和 $E$ 上的随机测度。因为对二进区间 $A$, $\mu_k(A)\to\mu(A)$, a、s。由 Fatou 引理，并利用式(8.22)，倘若 $d<1-t(1+\varepsilon)$，则

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(\iint |x-y|^{-d}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\right)\\
&\leqslant \mathrm{E}\left(\lim_{k\to\infty}\iint |x-y|^{-d}\mathrm{d}\mu_k(x)\mathrm{d}\mu_k(y)\right)\\
&\leqslant \liminf_{k\to\infty}\mathrm{E}\left(\iint |x-y|^{-d}\mathrm{d}\mu_k(x)\mathrm{d}\mu_k(y)\right)\\
&=\liminf_{k\to\infty} p_k^{-2}\,\mathrm{E}\left(\iint |x-y|^{-d}1_{E_k\times E_k}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\
&\leqslant c\int_0^1\int_0^1 d(x,y)^{-d}d(x,y)^{-t(1+\varepsilon)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&<\infty
\end{aligned}
$$

所以可推出，对任意 $d<1-t$，以概率 1, $\iint|x-y|^{-d}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)<\infty$，其中 $\mu$ 是由 $E$ 支撑的随机测度。再由命题 2.5 可知，只要 $\mu(E)>0$ 有正的概率，则 $\dim_H E\geqslant 1-t$。 □

这种随机剪切结构有许多自然的变化及延拓。例如在二维情况：可以从单位正方形（把对边看作相同）移去一系列半径为 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots$ 的园盘（或者任意凸集），并使它们的中心服从相互独立的均匀分布，就可得到该正方形的分形子集 $E$，见图 8.4。用类似的分析方法可找到剪切集的维数，见练习 8.4。

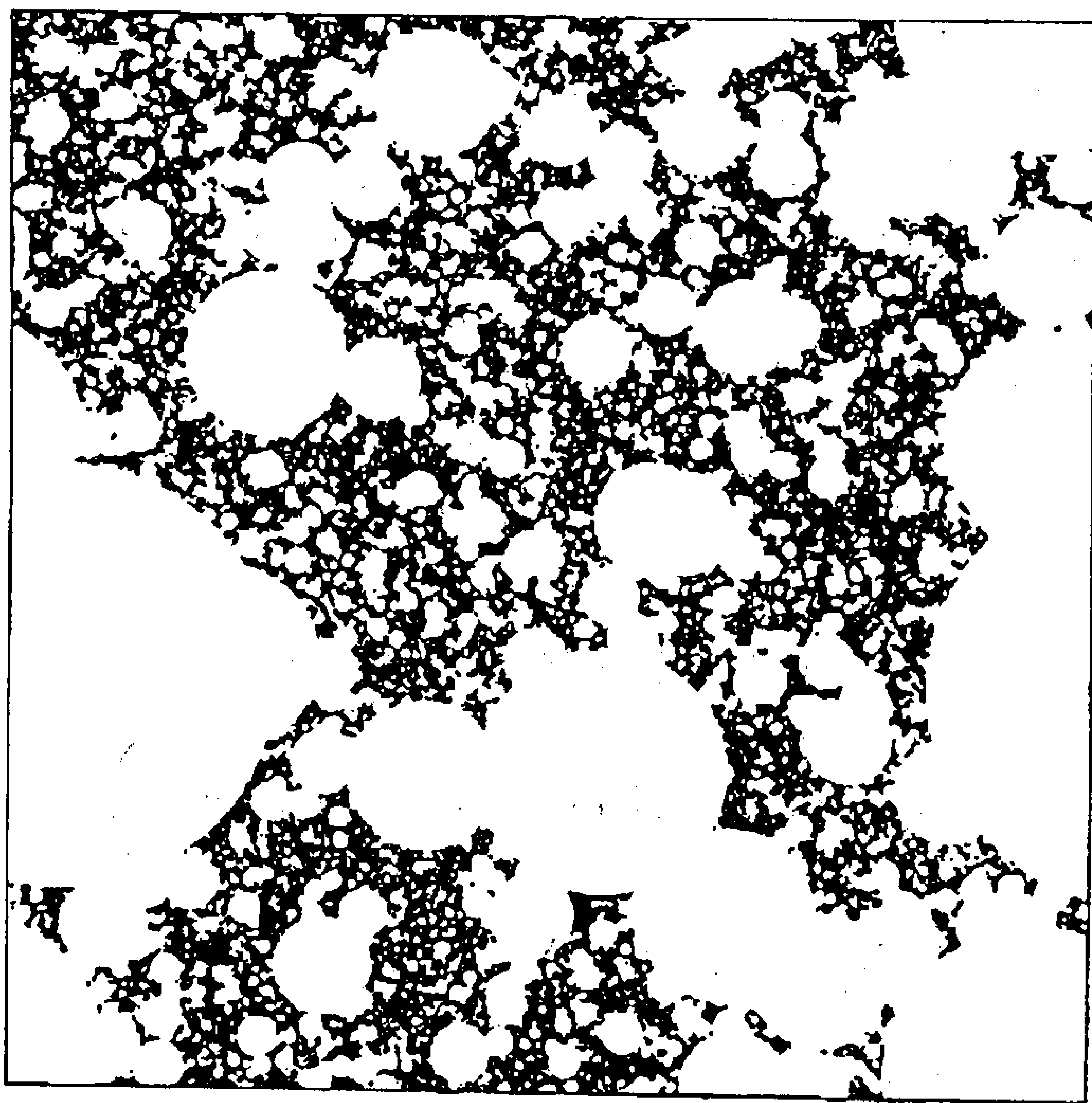


图8.4　一个由切掉具有递减的半径及随机中心的圆盘序列而得到的随机切割集. 这里第$k$个圆的半径为$\frac{1}{5}k^{-\frac{1}{2}}$, 切割集的维数是1.87

许多种类的随机集可以通过利用鞅定义该集上的随机测度的方法进行研究。例如不切掉区间,而可以考虑被无限多个区间覆盖的点,在合适的区间长度条件下,就有可能计算出属于无穷多个随机区间的点集的几乎必然的维数。

而且,鞅技巧可用来研究自相似集的自然的随机推广。象文献FG,15.1节中讨论的统计自相似集,那里利用$L^2$-有界鞅在这类集上定义了随机测度。

## 8.3 分形的双李卜希兹等价

在本节中将利用鞅，并以一种非常不同的方式来研究两个(非随机)自相似集之间的双李卜希兹映射的存在性。

集 $E$ 和 $F$ 称为是**双李卜希兹等价**，如果存在**双李卜希兹映射** $f: E \to F$，即满足下式的双射，

$$c_1|x-y| \leqslant |f(x)-f(y)| \leqslant c_2|x-y| \quad (x,y \in E) \tag{8.25}$$

其中 $0<c_1 \leqslant c_2$ 。双李卜希兹映射保持集的许多"分形性质"不变，特别是 $\dim E=\dim F$，这里 dim 表示豪斯道夫维数；上、下盒维数或任何合理定义的其它维数。见式(2.12)。正象拓扑学的一个主要目的是把集按同胚(认为两个集等价，如果在两个集之间存在一个连续可逆映射，并且其逆也连续。)分类一样，分形几何的目标之一是把集按双李卜希兹等价分类。在拓扑学中要寻找集的同胚不变量，即这样一种与集相关联的量，它对于同胚的集是相等的(如欧拉－庞伽莱特征值)。同样地，维数可认为是双李卜希兹不变量。对于双李卜希兹等价的两个集，它们必定是同胚的，并且具有相同的维数。然而，一般说来，这一条件远不足以保证它们等价。

下面用鞅方法说明某些具有相同维数的自相似集不是双李卜希兹等价的。为易于说明，只对一对特殊的集给以证明，但其方法适用于许多更一般的自相似集。

设 $E$ 是三分康托集，$F$ 是通过下面所述的区间代换而得到的自相似集：从单位区间开始，每次都以三个间隙相等，长度都为原区间的 $\beta=3^{-\log3/\log2}$ 倍的子区间取代原区间，并反复地进行下去。见图 8.5。则 $E$ 与 $F$ 同胚，见练习 8.6。$\beta$ 的选取保证 $\dim_H E=\dim_H F=\log2/\log3$ 。所以从拓扑或维数上不能排除 $E$ 与 $F$ 的双李卜希兹等价性。

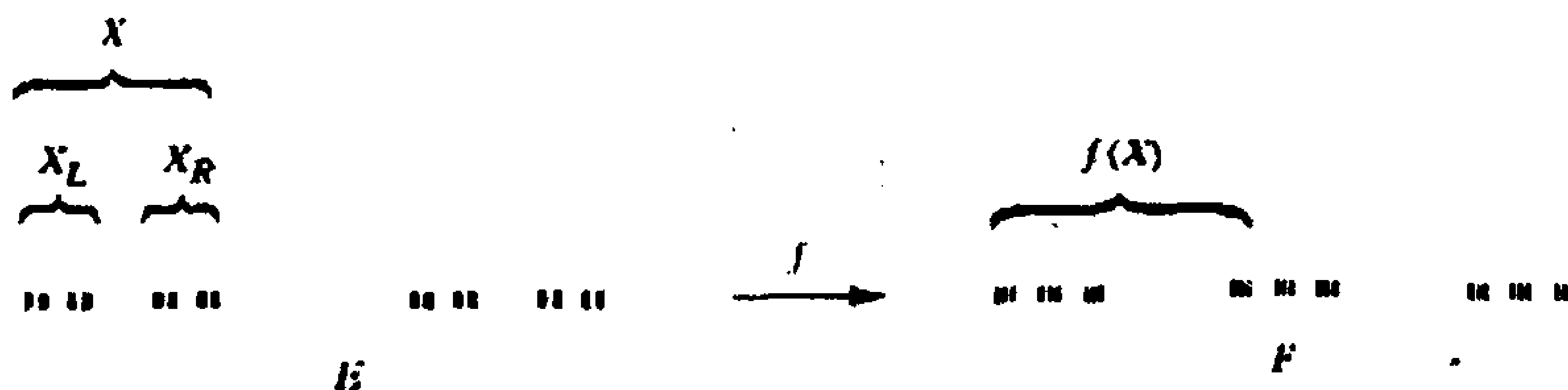



图 8.5 两个自相似集之间的映射 $f$. 对 $E$ 的第 $k$ 级水平的子集 $X$, 映象 $f(X)$是 $F$ 的第 $m(k)$ 级水平的子集的完全并

命题 8.9

上述的集 $E$、$F$ 不是双李卜希兹等价的。

**证明** 用反证法。假定存在双李卜希兹映射 $f$: $E \to F$ 满足式(8.25)。所谓 $E$ 的 $k$-级水平的子集，是指形式为 $E \cap X$ 的集，这里 $X$ 是在通常康托集的结构中出现的长度为 $3^{-k}$ 的一个区间。记 $C_k$是 $E$ 的所有 $k$-级水平子集所构成的类。类似地，$F$ 的 $k$-级水平子集是指 $F \cap Y$ 这种形式的集，其中 $Y$ 是在 $F$ 的结构中出现的长度为 $\beta^k$ 的 $3^k$ 个区间之一。

设 $c_1, c_2$ 由式(8.25) 所定义，对 $k=0,1,2,\cdots$ 定义 $m(k)$ 是满足下式的最小整数：

$$\beta^{m(k)} < c_1 3^{-k} \tag{8.26}$$

$f$ 是双李卜希兹映射的一个直接结论是：如果 $X$是 $E$ 的 $k$-级水平子集，则$f(X)$是 $F$ 的 $n$ 个 $m(k)$ 级水平子集的完全并，其中整数$n$满足：

$$3^{m(k)} 2^{-k} c_1 \leqslant n \leqslant 3^{m(k)} 2^{-k} c_2 \tag{8.27}$$

为了看清这点，注意到如果$f(X)$ 包含 $F$ 的一个 $m(k)$ 级水平子集 $Y$ 中的任意点，则 $f(X) \supset Y$; 否则必存在 $x \in X$, $w \in E \backslash X$ 使得

$f(x)$, $f(w)\in Y$，由此可得：

$$\beta^{m(k)}=|Y|\geqslant|f(x)-f(w)|\geqslant c_1|x-w|\geqslant c_1 3^{-k}$$

这与式(8.26)矛盾．由式(2.12)及 $\mathcal{H}^s(E)=\mathcal{H}^s(F)=1$ 可得式(8.27)中关于 $n$ 的界：

$$c_1\leqslant\frac{\mathcal{H}^s(f(X))}{\mathcal{H}^s(X)}=\frac{n3^{-m(k)}}{2^{-k}}\leqslant c_2 \tag{8.28}$$

对 $k=0,1,2,\cdots$ 定义 $g_k$: $E\to\mathbb{R}$

$$g_k(x)\equiv\mathcal{H}^s(f(X))/\mathcal{H}^s(X) \tag{8.29}$$

其中 $X$ 是 $E$ 的 $k$-级水平子集，且 $x\in X$．因此 $g_k$ 在 $E$ 的每个 $k$-级水平子集上是一常数．此外，如果 $x\in X$，而 $X_L$、$X_R$ 是 $k$-级水平子集 $X$ 的$(k+1)$-级水平子集，则

$$\begin{aligned}g_k(x)&=2^k\mathcal{H}^s(f(X))\\&=\frac{1}{2}[2^{k+1}\mathcal{H}^s(f(X_L))+2^{k+1}\mathcal{H}^s(f(X_R))]\\&=\frac{1}{2}[g_{k+1}(x_L)+g_{k+1}(x_R)]\\&=\mathcal{H}^s(X)^{-1}\int_X g_{k+1}(x)d\mathcal{H}^s(x)\end{aligned} \tag{8.30}$$

其中 $x_L$，$x_R$ 分别为 $X_L$ 和 $X_R$ 中的任意点．这正是鞅的条件(8.7)，由系 8.5 知 $g_k(x)$ 对几乎所有 $x\in E$ 收敛．

选取 $x$ 为任一收敛的点，设 $g_k(x)\to c$，由式(8.28)及(8.29)得 $c_1\leqslant c\leqslant c_2$。

由式(8.28)和(8.29)

$$g_k(x)=2^k3^{-m(k)}n \tag{8.31}$$

其中 $n$ 满足式(8.27)，于是

$$\frac{g_{k+1}(x)}{g_k(x)}=\frac{2^{k+1}3^{-m(k+1)}n'}{2^k3^{-m(k)}n}=\frac{2n'}{3^{m(k+1)-m(k)}n}$$

其中 $c_1^{1-\log2/\log3}\leqslant n,\ n'\leqslant 3bc_1^{-\log2/\log3}$，这里利用了式(8.26)、(8,27) 以及定义(8.26) 保证的 $m(k+1)-m(k)$ 对任意 $k$ 有界。因此 $g_{k+1}(x)/g_k(x)$ 仅能取有限多个不同值。由于 $g_k(x)$ 收敛于一非 0 极限值，这要求 $g_k(x)$ 最终是常数，即对所有充分大的 $k$，$g_k(x)=c$ 。对所有这些 $k$，由式(8.31) 知：存在整数 $n_k$，使

$$c=g_k(x)=2^k3^{-m(k)}n_k \tag{8.32}$$

所以 $c$ 是有理数，设 $c=p/q$，其中 $p$，$q$ 是互质的正整数。因此，对这些充分大的 $k$，$2^k3^{-m(k)}n_k=p/q$ 即

$$2^kn_kq=3^{m(k)}p \tag{8.33}$$

即对任意充分大的 $k$，$p$ 可被 $2^k$ 整除。这显然是荒谬的。所以 $f$ 不是双李卜希兹的 。 □

在以上的证明中，利用鞅得出：在某种意义下，$f$ 是“关于测度可微的”，而由集合 $E,F$ 的几何性质可推出 $f$ 是“局部线性的”。

用很类似的方法，可以证明：如果 $E;F$ 是如下构造的自相似集，即 $E$ 和 $F$ 分别是反复用 $m$ 个或 $n$ 个长度相同且间隔一样的子区间来代换原区间而得到的自相似集，则 $E,F$ 是双李卜希兹等价的必要条件(而且这一条件确实是充分的)是：$\dim_H E=\dim_H F$ 且 $m=n^q$ 或 $n=m^q$ 对某一正整数 $q$ 成立。

更一般地，用类似的方法可以得到，利用不相等的相似比构造的自相似集之间等价的必要条件。记 $E(r_1,\cdots,r_m)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上相似比分别为 $r_1,\cdots,r_m$ 的 IFS 的吸引子，并且满足强分离条件，则 $E(r_1,\cdots,r_m)$ 是全不连通的。

**命题 8.10**

下列条件是集 $E(r_1,\cdots,r_m)$ 与 $E(t_1,\cdots,t_q)$ 双李卜希兹等价的必要条件：

(a) $\dim_H E(r_1,\cdots,r_m)=\dim_H E(t_1,\cdots,t_q)\equiv s$；

(b) $\mathbb{Q}(r_1^s,\cdots,r_m^s)=\mathbb{Q}(t_1^s,\cdots,t_q^s)$，其中 $\mathbb{Q}(a_1,\cdots,a_m)$ 表示$(\mathbb{R},+,\times)$的子域，该子域由 $a_1,\cdots,a_m$ 的有理函数构成；

(c) 存在正整数 $p,p'$ 使

$$\mathrm{sgp}(r_1^p,\cdots,r_m^p)\subset\mathrm{sgp}(t_1,\cdots,t_q)$$
$$\mathrm{sgp}(r_1^{p'},\cdots,r_q^{p'})\subset\mathrm{sgp}(r_1,\cdots,r_m)$$

这里 $\mathrm{sgp}(a_1,\cdots,a_m)$ 表示由 $a_1,\cdots a_m$ 生成的$(\mathbb{R}^+,\times)$的子半群，即元素为 $a_1^{\alpha_1}\cdots a_m^{\alpha_m}$ 这种乘积形式的集合，其中 $\alpha_i$ 是非负整数。

**证明** 证明的基本思想与命题 8.9 相似，略。 □

一般地，确定两个集是否为双李卜希兹等价是一个复杂的问题。以上的方法适用于某些与康托集同胚且全不连通的自相似集。在其它一些极端情况下，一大类同胚于圆的准自相似分形之间的等价是由豪斯道夫维数完全确定；这一结果在文献 FG 14.4 节已有讨论。

## 8.4 注记与参考文献

Williams(1991)的书中给出了一些应用鞅的很好的详细处理方法。在许多概率论教科书中，如 Grimmett 和 Stirziker(1992)，都包含鞅论的内容。

Mandelbrot(1972,1982) 引入了随机剪切模型，或称为由他命名的随机震颤模型，其维数计算是基于生灭过程。这里的方法属于 Zähle(1984)。他给出了许多概括性的东西。对于其它基于区间的随机代换等结构，见 Kahane(1985) 及其中的参考文献。与康

托集类似的其它随机集和自相似结构在 FG 15 章中有描述。

用鞅来讨论自相似集的双李卜希兹等价的方法是属于 Falconer 和 Marsh(1992)。Cooper 和 Pignataro(1988) 给出了不同的处理方法。

## 练习

8.1 验证：如果 $Y_k$ 是鞅，则对任意 $k$，$E(Y_k)=E(Y_0)$；且对任意 $m,k\geqslant 0$，$E(Y_{m+k}|\mathcal{F}_k)=Y_k$。

8.2 设 $Y_k$ 是关于 $\mathcal{F}_k$ 的上鞅，且 $\sup_k E(Y_k^2)<\infty$，则 $Y_k^2$ 也是上鞅。

8.3 在随机剪切模型中，证明：如果 $\sum_1^\infty a_k<\infty$，则 $\mathcal{L}(E)>0$ 具有正概率；如果 $\sum_1^\infty a_k=\infty$，则 $\mathcal{L}(E)=0$ $a.s$。

8.4 设 $a_k$ 是非升数列，且 $a_k\sim tk^{-\frac{1}{2}}$ 其中 $0<t<\sqrt{2/\pi}$，$E$ 是如下所述的随机剪切集：把单位正方形(把对边看作相同)去掉一序列半径为 $a_k$，中心为独立均匀分布的圆而得到集 $E$。修改 8.2 节中的讨论以证明 $\dim_H E\leqslant\overline{\dim}_B E\leqslant 2-\pi t^2$，且具有正概率取等号。

8.5 设 $E, F$ 分别是以 $m$ 个或 $n$ 个长度相等且具有相同间隔的子区间取代原有区间构造出来的 $\mathbb{R}$ 的自相似子集。证明在 $E, F$ 之间存在双李卜希兹等价映射的充要条件是：$\dim_H E=\dim_H F$ 且 $m=n^q$ 或 $n=m^q$ 对某一正整数 $q$ 成立。(提示：模仿命题 8.9 的证明；对一个较简单的问题：当 $m$ 有一个不能整除 $n$ 的素因子时，证明这种映射不存在。)

8.6 验证命题 8.9 中考虑的两个集同胚。(提示：用分类的方式，建立集的“间隙”之间的映射。)

# 第 9 章　切线测度

切线测度提供了研究集和测度的无穷小特性的一种手段。特别是许多涉及密度、可求长性及集的射影等几何测度论的典型结论,都可以利用切线测度,通过自然的方法证明.一些非常有用且富有技巧性的结论已利用这些方法得到.在这一章中只描述了切线测度的基本性质,并给出几个简单的但却相当优美的应用实例.

## 9.1　定义和基本性质

切线测度描述的是点的邻域集合的结构,当通过一种不断放大的微观的尺度观察时,这种结构会变得愈加明显.也就是在观察极限集或极限测度时,可以通过对点周围一系列逐渐扩大的对象的考察来实现。这些极限或"切线测度"在某种意义上类似于导数。它们带有关于集或测度的局部结构的大量信息,但是,由于切线测度具有的某些有规则的性质,意味着利用它们通常比利用原来的集或测度更易于处理.

在本章中,$\mu$ 总是表示 $\mathbb{R}^n$ 上的有限(或局部有限)波雷尔测度;在非常多的大部分重要情形,$\mu$是 $s$-维豪斯道夫测度在 $s$ 集 $E$ 上的限制.(这里 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是满足 $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$的波雷尔集)即 $\mu=\mathcal{H}^s|_E$.在这一章中,总是假设存在数$s$,使得对$\mu$-几乎所有$x$,$\mu$ 的$s$-维密度上、下有界,即:

$$0<\underline{D}^s(\mu,x)\equiv\liminf_{r\to 0}\frac{\mu(B(x,r))}{(2r)^s}\leqslant\limsup_{r\to 0}\frac{\mu(B(x,r))}{(2r)^s}$$
$$=\overline{D}^s(\mu,x)<\infty \tag{9.1}$$

(在 $\mu$ 是$\mathcal{H}^s$ 在 $s$-集上的限制的情形,则对$\mu$-几乎所有的 $x$,$\overline{D}^s(\mu,x)<\infty$必然成立).

对 $x\in\mathbb{R}^n$ 及 $r>0$，由下式定义相似映射 $F_{x,r}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$：

$$F_{x,r}(y)=(y-x)/r \tag{9.2}$$

于是 $F_{x,r}$ 将点 $x$ 变换成原点，并以系数 $1/r$ 为相似比，所以球 $B(x,r)$ 被映射成单位球 $B(0,1)$。令人特别感兴趣的是那些相似测度变换的方式，因此，定义测度间诱导出的相似映射如下：

$$(F_{x,r}[\mu])(A)=\mu(x+rA) \tag{9.3}$$

其中 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的测度，而对任意集 $A\subset\mathbb{R}^n$，$x+rA=\{x+ra:a\in A\}$。于是 $F_{x,r}[\mu]$ 可以看成是 $\mu$ 在 $x$ 的周围放大了 $1/r$ 倍的测度。

为定义切线测度，考察当 $r\searrow 0$ 时，$F_{x,r}[\mu]$ 的可能的极限情形。为了得到正的且又局部有限的极限测度，这些测度的数量级需要合理的确定。于是，可以按下列方式定义 $\mu$ 在点 $x\in\mathbb{R}^n$ 的切线测度 $\nu$：如果存在实数序列 $r_k\searrow 0$，使：

$$\nu=\lim_{k\to\infty} r_k^{-s}F_{x,r_k}[\mu] \tag{9.4}$$

这里的极限是测度序列的弱极限，见 1.4 节．$\mu$ 在点 $x$ 的全部切线测度集合称为 $\mu$ 在 $x$ 的切线空间，并用 $\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 表示．[注意，由于某些原因，也称定义的切线测度为标准的切线测度．] 当然，$\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 依赖于 $s$ 的值，但对每个 $\mu$，最多只有一个 $s$ 使式(9.1)成立．

利用式(9.3) 及关于弱收敛的定义式(1.24)，式(9.4) 意味着对任意具有有界支撑的连续函数 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，

$$\int g(y)\mathrm{d}\nu(y)=\lim_{k\to\infty} r_k^{-s}\int g((y-x)/r_k)\mathrm{d}\mu(y) \tag{9.5}$$

切线测度是局部有限的，但一般情况下，它们都是无界支撑上的无穷测度，即使 $\mu$ 不是这样的测度．

举出一些例子将有助于理解切线测度的概念：固定 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上满足 $0<\mathcal{L}^n(E)<\infty$ 的有界波雷尔子集，其中 $\mathcal{L}^n$ 是 $n$-维勒贝格测度，令 $\mu=\mathcal{L}^n|_E$ ．勒贝格密度定理(2.20) 指出：当 $r\to 0$，对 $\mathcal{L}^n$-几乎所有的 $x\in E$，$\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap E)/\mathcal{L}^n(B(x,r))\to 1$ ．直观地，这意味着，对几乎所有的 $x\in E$，中心在 $x$ 的小球几乎被 $E$ 充满，所以 $\mu$

在这样的 $x$ 周围的放大逼近于勒贝格测度 —— 唯一的切线测度。为讲清楚这点，如果 $g$ 是支撑在 $B(0,R)$ 上的连续函数，则当 $r\to 0$

$$
\begin{aligned}
r^{-n}\int g\,\mathrm{d}F_{x,r}[\mu] &= r^{-n}\int g((y-x)/r)\mathrm{d}\mu(y)\\
&= r^{-n}\int g((y-x)/r)1_E(y)\mathrm{d}y\\
&= \int g(z)1_E(x+rz)\mathrm{d}z\\
&\to \int g(z)\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

(在最后一步，用到了勒贝格密度定理，对几乎所有的 $x\in E$，$\int_{B(0,R)}|1_E(x+rz)-1|\mathrm{d}z\to 0$，其中 $R$ 是选成使 $\mathrm{spt}g\subset B(0,R)$)，于是，对几乎所有的$x\in E$，$\lim_{r\to 0} r^{-n}F_{x,r}[\mu]=\mathcal{L}^n$，所以 $\mathcal{L}^n$ 是 $\mu$ 在 $x$ 处的唯一的切线测度 .

第二个例中的 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中单位圆 $C$ 上的"长度测度"，即 $\mu(A)=\mathcal{H}^1|_C$，这里$\mathcal{H}^1$是一维豪斯道夫测度。对$x\in C$，当放大倍数越来越大时，$C$ 上 $x$ 附近的圆弧逼近一直线段，所以，可以期望唯一的切线测度是一维测度在一定直线上的限制，这条直线过原点，且与 $C$ 的过 $x$ 点的切线平行，这个事实仍然可以利用式(9.5) 正式验证。更一般地，对 $C$ 是任意光滑曲线，上述的结论也成立。

更有趣的情形是当 $\mu$ 是分形测度的时候。设 $\mu=\mathcal{H}^s|_E$，其中 $s=\log 2/\log 3$，而 $E$ 是三分康托集 . 在这种情况下，切线空间具有非常丰富的结构 . 对几乎所有的$x$，$\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 包含无穷多个测度，每个都是$\mathcal{H}^s$ 在康托集 $E$ 的无界延拓上的限制，这种延拓的局部看起来都像$E$自身。记$E=\{0\cdot b_1b_2\cdots$是三进小数展开式，其中对任意 $i$，$b_i=0$ 或 $2\}$，几乎每个$x\in E$，都具有下列形式的三进小数表达式，在表达式中，含有0或2的任意有限序列，且每个有限序列出现无穷多次，于是在这样的$x$点，切线空间$\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 包含了以

在它的每个点周围都放大了的 $E$ 的扩张为支撑的测度，特别 $\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 包含测度 $\mathcal{H}^s$ 在延拓了的康托集 $E'=\{a_n a_{n-1}\cdots a_1\cdot b_1 b_2\cdots$ 是三进展开式，对任意 $i$，$a_i$，$b_i=0$ 或 $2\}$ 上的限制，以及在所有包含原点且与 $E'$ 相似的集上的限制。有关进一步的例子，请参见图 9.1。

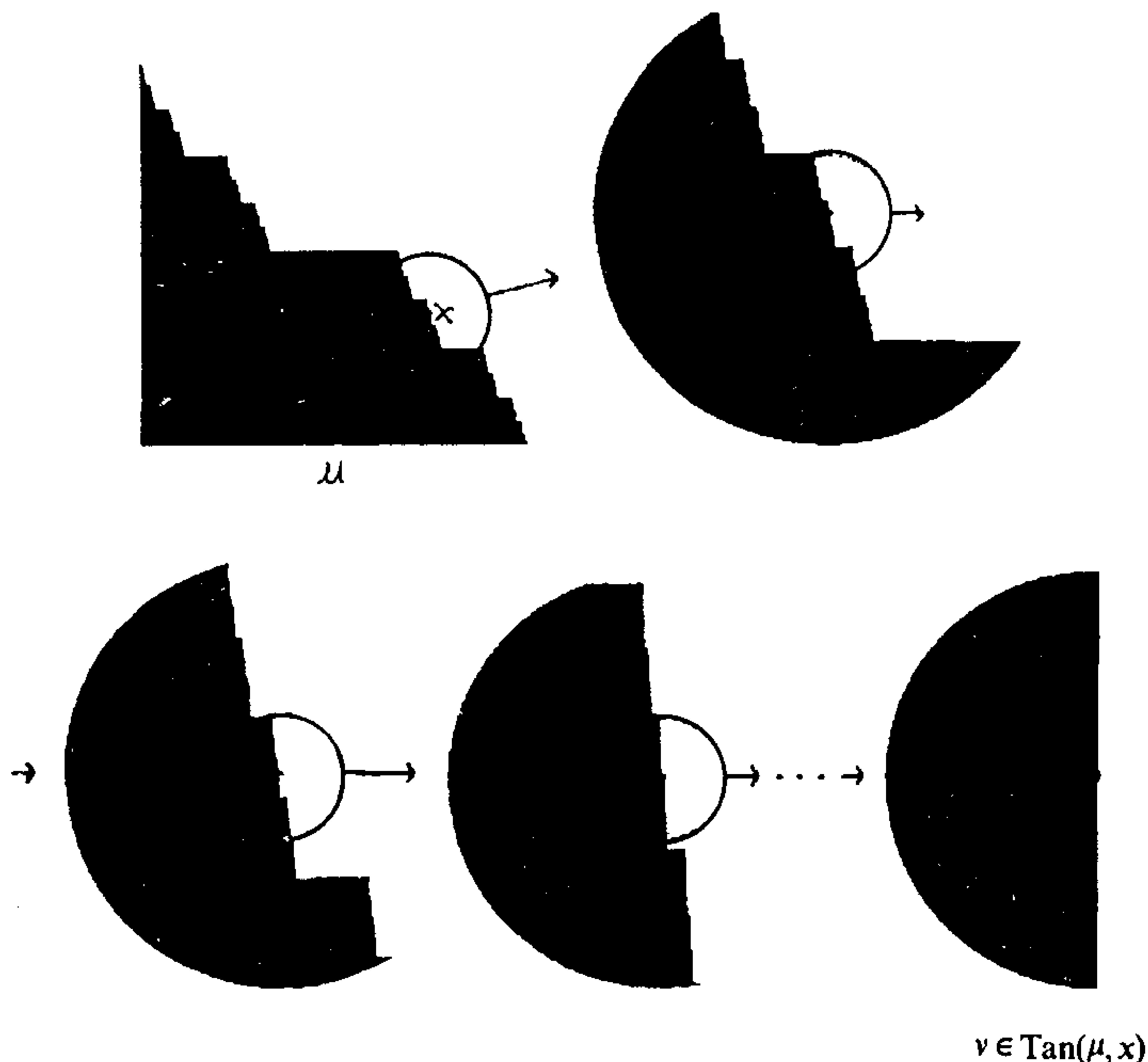



**图 9.1 切线测度 $\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 是测度 $\mu$ 在 $x$ 的周围的一系列放大(多重倍数的)的弱极限，这里的 $\mu$ 是勒贝格测度在"魔鬼的阶梯"的区域上的限制，而切线测度 $\nu$ 是勒贝格测度在半平面上的限制**

在所有的这些例子中，可以看到，只要 $\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 及 $z\in\mathrm{spt}\nu$ (这里 $\mathrm{spt}\nu$ 是 $\nu$ 的支撑)，则把 $z$ 变换成原点的 $\nu$ 的变换 $F_{z,1}[\nu]$ 也在 $\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 中。(在前两个例子中，这是因为 $\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 中的唯一测度在这样的变换下是不变的，而在第三个例子中，则是由于 $\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 中所包含的测度数量特别大的缘故。)，正如在下面的命题 9.3 中

将要见到的，对所有的切线空间这个“漂移不变性”都成立，这也正是使切线测度成为如此有用的工具的众多重要性质中的一个。

下面引出切线测度的一些普通性质，取 $A$ 为式(9.3)中的球，对 $r,\ R>0$,

$$\begin{aligned} r^{-s}(F_{x,r}[\mu])(B(0,R)) &= r^{-s}\mu(x+rB(0,R)) \\ &= r^{-s}\mu(B(x,rR)) \\ &= R^s(rR)^{-s}\mu(B(x,rR)) \end{aligned} \tag{9.6}$$

这个观察结果导出了切线测度的几个基本性质，其中包括了它们与密度的关系。

### 引理 9.1

设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的测度，则对任意满足：

$$0<\underline{D}^s(\mu,x)\leqslant\overline{D}^s(\mu,x)<\infty \tag{9.7}$$

的 $x$，下列结果成立：

(a) $\operatorname{Tan}(\mu,x)$ 是非空的，

(b) 对任意 $\nu\in\operatorname{Tan}(\mu,x)$ 及 $R>0$

$$\underline{D}^s(\mu,x)\leqslant(2R)^{-s}\nu(B(0,R))\leqslant\overline{D}^s(\mu,x)$$

(c) 对任意 $\nu\in\operatorname{Tan}(\mu,x)$, $0\in\operatorname{spt}\nu$。

**证明**

(a) 如果在 $x$ 点式(9.7)成立，由式(9.6)知，只要 $r$ 充分小，则存在数 $d>0$ 使对任意 $R>0$

$$r^{-s}(F_{x,r}[\mu])(B(0,R))\leqslant R^s d$$

由弱紧性(命题 1.9)，存在数列 $r_k\searrow 0$ 和测度 $\nu$ 使 $r_k^{-s}F_{x,r_k}[\mu]\to\nu$，所以 $\nu\in\operatorname{Tan}(\mu,x)$。

(b) 设 $\nu$ 对序列 $r_k\searrow 0$ 按式(9.4)给定，则对任意 $R>0$，由式(9.1)、(9.6)及(1.25)得：

$$\begin{aligned}(2R)^s\underline{D}^s(\mu,x) &= R^s\liminf_{r\to 0}(rR)^{-s}\mu(B(x,rR)) \\ &\leqslant\limsup_{k\to\infty}r_k^{-s}(F_{x,r_k}[\mu])(B(0,R))\end{aligned}$$

$$\leqslant \nu(B(0,R))$$

用同样的方法，但这次利用式(1.26)可得，对开球 $B^0(0,R)$，$\nu(B^0(0,R)) \leqslant (2R)^s \overline{D}^s(\mu,x)$。由于对任意 $R_1 > R$，$\nu(B(0,R)) \leqslant \nu(B^0(0,R))$，因此取 $R_1$ 任意接近 $R$，即得需要的上界。

(c) 由于 $0 < \underline{D}^s(\mu,x)$，由(b)知，对任意 $R > 0$，$0 < \nu(B(0,R))$，所以 $0 \in \operatorname{spt}\nu$。 □

本节余下的部分将证明切线空间的漂移不变性。回顾如下定义：对 $\mathbb{R}^n$ 上的测度 $\mu$ 及可测集 $E$，称点 $x \in \operatorname{spt}\nu$ 是 $E$ 的稠密点，如果

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu(E \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = 1 \tag{9.8}$$

特别地，根据命题 1.7，$\mu$- 几乎所有的 $x \in E$ 是稠密点。容易看出，如果 $\nu \in \operatorname{Tan}(\mu,x)$，$z \in \operatorname{spt}\nu$，则存在序列 $x_k \in \operatorname{spt}\mu$ 使得 $F_{x,r_k}(x_k) \to z$。下列引理推广了这一结果，即允许 $x_k$ 从一个规定的集 $E$ 上来选取。

## 引理 9.2

设 $E$ 是 $\mu$- 可测集，$x \in \operatorname{spt}\mu$ 是 $E$ 的稠密点。令 $\nu = \lim_{k\to\infty} r_k^{-s} F_{x,r_k}[\mu] \in \operatorname{Tan}(\mu,x)$，则对所有 $z \in \operatorname{spt}\nu$，存在点列 $x_k \in E$，使得当 $k \to \infty$ 时

$$F_{x,r_k}(x_k) \equiv \frac{x_k - x}{r_k} \to z \tag{9.9}$$

**证明** 欲使式(9.9)成立，必须选取 $x_k$"接近" $x + r_k z$。所以对任意 $k$，选取 $x_k \in E$ 使

$$|x + r_k z - x_k| < \operatorname{dist}(x + r_k z, E) + k^{-1} r_k \tag{9.10}$$

如果 $z = 0$，则 $\operatorname{dist}(x + r_k z, E) = 0$，立即可得式(9.9)。假定式(9.9)不成立，且 $z \neq 0$，则存在满足 $0 < \delta < |z|$ 的 $\delta$ 使

$$|x + r_k z - x_k| \geqslant 2\delta r_k \tag{9.11}$$

对无穷多个$k$ 成立 。对满足 $k>\delta^{-1}$这样的 $k$, 由式(9.10) 及(9.11)得

$$r_k\delta\leqslant r_k(2\delta-k^{-1})<\operatorname{dist}(x+r_kz,E)$$

故特别地有：

$$B(x+r_kz,r_k\delta)\subset B(x,r_k|z|+r_k\delta)\setminus E\subset B(x,2r_k|z|)\setminus E$$

由于 $x$ 是 $E$ 的稠密点，由式(1.25)、(1.26) 以及 $\nu(B^0(z,\delta))>0$( 因为$z\in\operatorname{spt}\nu$) 得：

$$\begin{aligned}
1&=\lim_{k\to\infty}\frac{\mu(E\cap B(x,2r_k|z|))}{\mu(B(x,2r_k|z|))}\\
&=\lim_{k\to\infty}\frac{\mu(B(x,2r_k|z|))-\mu(B(x,2r_k|z|)\setminus E)}{\mu(B(x,2r_k|z|))}\\
&\leqslant 1-\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(B(x+r_kz,r_k\delta))}{\mu(B(x,2r_k|z|))}\\
&=1-\liminf_{k\to\infty}\frac{(F_{x,r_k}[\mu])(B(z,\delta))}{(F_{x,r_k}[\mu])(B(0,2|z|))}\\
&\leqslant 1-\frac{\nu(B^0(z,\delta))}{\nu(B(0,2|z|))}<1
\end{aligned}$$

这一结论意味着式(9.11) 不能对无穷多个 $k$ 成立，因而式(9.9) 得证 。 □

下面的漂移不变性的证明以一种优雅的方式应用了测度弱收敛的性质 。

**命题 9.3**

对 $\mu$ - 几乎所有的 $x$, 切线空间 $\operatorname{Tan}(\mu.x)$ 是漂移不变的，即对任意的 $\nu\in\operatorname{Tan}(\mu,x)$ 及 $z\in\operatorname{spt}\nu$, $F_{z,1}[\nu]\in\operatorname{Tan}(\mu,x)$ 。

**证明** 设 $R$, $\varepsilon$, $\delta$ 是正数，令

$E(R,\varepsilon,\delta)=\{x$: 存在 $\nu_x\in\operatorname{Tan}(\mu,x)$ 及 $z(x)\in\operatorname{spt}\nu_x$, 使对任意 $r<\delta$,

$$d_R(F_{z(x),1}[\nu_x], r^{-s}F_{x,r}[\mu]) > \varepsilon\} \tag{9.12}$$

(测度上的伪度量 $d_R$ 的定义见式(1.28))。一旦证明了对任意的这样 $R$, $\varepsilon$, $\delta$, $\mu(E(R, \varepsilon, \delta))=0$, 则就可容易地证得本命题。

假如不是这样，即存在 $R$, $\varepsilon$, $\delta$ 使 $\mu(E(R, \varepsilon, \delta))>0$, 对任意的 $x \in E(R, \varepsilon, \delta)$, 选取 $\nu_x \in \mathrm{Tan}(\mu,x)$ 及 $z(x) \in \mathrm{spt}\nu$ 使条件(9.12)成立。可以找到满足 $\mu(E)>0$ 的波雷尔集 $E \subset E(R, \varepsilon, \delta)$, 使得对任意 $x, y \in E$

$$d_R(F_{z(x),1}[\nu_x], F_{z(y),1}[\nu_y]) < \frac{1}{2}\varepsilon \tag{9.13}$$

这是由于从引理 1.11 知，$d_R$ 是可分的。如果$\{\mu_k\}$ 是可数稠的测度序列，则存在 $k$ 使

$$E \equiv \{x \in E(R, \varepsilon, \delta): d_R(F_{z(x),1}[\nu_x], \mu_k) < \frac{1}{4}\varepsilon\}$$

具有正的 $\mu$- 测度。

取 $x$ 是 $E$ 的任一稠密点，且 $\nu_x = \lim\limits_{k\to\infty} r_k^{-s}F_{x,r_k}[\mu]$。由引理 9.2, 可找到 $x_k \in E$ 使得$(x_k - x)/r_k \to z(x)$, 由于 $F_{x_k,r_k} = F_{(x_k-x)/r_k,1} \circ F_{x,r_k}$, 故当 $k \to \infty$ 时

$$\begin{aligned} r_k^{-s}F_{x_k,r_k}[\mu] &= F_{(x_k-x)/r_k,1}[r_k^{-s}F_{x,r_k}[\mu]] \\ &\to F_{z(x),1}[\nu_x] \end{aligned} \tag{9.14}$$

由于 $x_k \in E(R, \varepsilon, \delta)$, 如果 $k$ 充分大，由式(9.13)、引理 1.10 以及式(9.14)即得：

$$\begin{aligned} \varepsilon &< d_R(F_{z(x_k),1}[\nu_{x_k}], r_k^{-s}F_{x_k,r_k}[\mu]) \\ &\leqslant d_R(F_{z(x_k),1}[\nu_{x_k}], F_{z(x),1}[\nu_x]) + d_R(F_{z(x),1}[\nu_x], r_k^{-s}F_{x_k,r_k}[\mu]) \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon \end{aligned}$$

矛盾。

所以对任意的 $R$, $\varepsilon$, $\delta>0$, $\mu(E(R, \varepsilon, \delta))=0$, 由引理 1.10 知：$\{x$:存在非漂移不变测度 $\nu_x \in \mathrm{Tan}(\mu,x)\} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(m, 1/m, 1/n)$ 且它的 $\mu$- 测度为 0, 证毕。 □

## 9.2 切线测度与密度

切线测度是研究集与测度的局部性质，如密度与平均密度的一个自然的工具。其思想是把含有集或测度的问题转变成更容易处理的含有切线测度的问题。本节从下列的经典结果开始，给出这种方法的一些典型例子。除了 $s$ 是整数外，$s$- 集的密度在具有正测度的集上不存在.(回顾一下，密度的不存在意味着具有分形性.) 下面从一般的测度 $\mu$ 开始，但考虑的主要例子是 $\mathcal{H}^s$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的 $s$- 集 $E$ 上的限制，即 $\mu=\mathcal{H}^s|_E$，其中 $E$ 是满足 $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$的波雷尔集。

为了说明切线测度在特别简单情况中的应用，首先证明：如果 $0<s<1$，则密度不存在。然后对一般的非整数 $s$ 的情况给出更复杂的证明。

**命题 9.4**

设 $0<s<1$，$\mu$是 $\mathbb{R}^n$上的测度，且对$\mu$-几乎所有 $x$，$0<\underline{D}^s(\mu,x)\leqslant\overline{D}^s(\mu,x)<\infty$。则对 $\mu$-几乎所有 $x$，$\underline{D}^s(\mu,x)<\overline{D}^s(\mu,x)$。

**证明** 假设满足条件 $0<\underline{D}^s(\mu,x)=\overline{D}^s(\mu,x)$的 $x$ 点的集合具有正测度。由命题 9.3，可选取 $x$ 使 $\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 是漂移不变的，设 $d\equiv\underline{D}^s(\mu,x)=\overline{D}^s(\mu,x)>0$ 是在该点 $x$ 的密度。由引理 9.1(b)，对任意 $\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 及任意 $R>0$，$d=(2R)^{-s}\nu(B(0,R))$。任意固定 $\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$，则存在满足 $|z|=1$ 的 $z\in\mathrm{spt}\nu$(否则当 $R$ 接近 1 时 $\nu(B(0,R))$ 是常数)。由命题 9.3，$F_{z,1}[\nu]\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$，故对任意 $R>0$，$d=(2R)^{-s}(F_{z,1}[\nu])(B(0,R))=(2R)^{-s}\nu(B(z,R))$。当$0<R<\frac{1}{2}$时，$B(z,R)\subset B(0,1+2R)\backslash B(0,1-2R)$，所以对较小的 $R$，

$$(2R)^s d=\nu(B(z,R))$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \nu(B(0,1+2R))-\nu(B^{0}(0,1-2R)) \\
&=2^{s}d[(1+2R)^{s}-(1-2R)^{s}] \\
&=O(R)
\end{aligned}
$$

这与 $0<s<1$ 是矛盾的，由此可知，对 $\mu$- 几乎所有 $x$，$\underline{D}^{s}(\mu,x)<\overline{D}^{s}(\mu,x)$ 。 □

特别地，如果 $0<s<1$，则 $s$- 集 $E$ 的密度 $D^{s}(E,x)$ 几乎处处不存在。

为了把这一结果推广到一般的非整数 $s$ 的情况，引进" $s$- 均匀"测度 。先证明这样的测度只有 $s$ 是整数时才存在；然后证明：如果密度 $D^{s}(\mu,x)$ 在一正测度集上存在，则 $\mu$ 有 $s$- 均匀的切线测度，所以 $s$ 必定是整数 。

对于 $s\geqslant 0$，称 $\mathbb{R}^{n}$ 上的测度 $\nu$ 是 $s$- 均匀的，如果存在 $c>0$，使得对任意 $x\in \operatorname{spt}\nu$，及 $r>0$

$$
\nu(B(x,r))=cr^{s} \tag{9.15}
$$

引理 9.5

设 $\nu$ 是 $\mathbb{R}^{n}$ 上的 $s$- 均匀测度 。如果 $x\in \operatorname{spt}\nu$，$\nu_{1}\in \operatorname{Tan}(\nu,x)$，则 $\nu_{1}$是 $\mathbb{R}^{n}$ 上的 $s$- 均匀测度 。

**证明** 设 $\nu_{1}=\lim_{k\to\infty} r_{k}^{-s}F_{x,r_{k}}[\nu]$，$z\in \operatorname{spt}\nu_{1}$，可以找到点 $z_{k}\in \operatorname{spt} F_{x,r_{k}}[\nu]$ 使 $z_{k}\to z$ . 因而存在$x_{k}\in \operatorname{spt}\nu$使$(x_{k}-x)/r_{k}=F_{x,r_{k}}(x_{k})=z_{k}\to z$。则对任意 $R>0$，由式(9.15) 可得：

$$
\begin{aligned}
(F_{x,r_{k}}[\nu])(B(z,R)) &= \nu(B(x+r_{k}z,r_{k}R)) \\
&=\nu(B(x_{k}+r_{k}(z-z_{k}),r_{k}R)) \\
&\geqslant \nu(B(x_{k},r_{k}(R-|z-z_{k}|)) \\
&=cr_{k}^{s}(R-|z-z_{k}|)^{s}
\end{aligned}
$$

因此再由式(1.25)

$$
\nu_{1}(B(z,R))\geqslant \limsup_{k\to\infty} r_{k}^{-s}F_{x,r_{k}}[\nu](B(z,R))\geqslant cR^{s}
$$

类似地由式(1.26)可得，对任意 $R>0, \nu_i(B^0(z,R))\leqslant cR^s$。由这两个不等式立得对任意$R$，$\nu_i(B(z,R))=cR^s$，因此 $\nu_i$ 是 $s$- 均匀的。 □

事实上 $s-$ 均匀测度确实是非常有规则的：只有 $s$ 为整数时它们才存在 。

**命题　9.6**

设 $\nu$ 是 $R^n$ 上 $s-$ 均匀测度，即存在 $s\geqslant 0$ ，$c>0$，使对任意 $x\in \mathrm{spt}\nu$，及 $r>0$，

$$\nu(B(x,r))=cr^s,\quad x\in \mathrm{spt}\nu,\quad r>0 \tag{9.16}$$

则 $s$ 是整数，且 $0\leqslant s\leqslant n$ 。

* **证明**　设 $g(r)\in\mathbb{R}^n$是 $s$- 均匀测度 $\nu$ 在 $B(0,r)$ 上的限制的质量中心，因此对任意 $z\in\mathbb{R}^n$

$$z\cdot g(r)=\int_{B(0,r)}(z\cdot y)d\nu(y) \tag{9.17}$$

其中"·"表示 $\mathbb{R}^n$ 中通常的数量积运算。以下的证明要用到下面的估计：如果 $\nu$ 是任一 $s$- 均匀测度，$0\in \mathrm{spt}\nu$，则当 $z$ 沿 $\nu$ 的支撑趋于0时

$$|z\cdot g(r)|/|z|\to 0 \tag{9.18}$$

为了导出式(9.18)，考虑"势积分"：

$$Q_r(x)=\int_{B(x,r)}(r^2-|x-y|^2)\mathrm{d}\nu(y) \tag{9.19}$$

在积分号内于 $x=0$ 处求导得：

$$\nabla Q_r(0)=-2\int_{B(0,r)}y\mathrm{d}\nu(y) \tag{9.20}$$

其中"∇"是通常的"梯度"算子。(注意来自边界对导数的影响变为0，这是由于当 $|x|\to 0$时，由式(9.16)得

$$\left|\int_{B(x,r)}(r^2-|y|^2)\mathrm{d}\nu(y)-\int_{B(0,r)}(r^2-|y|^2)\mathrm{d}\nu(y)\right|$$

$$\leqslant \int_{B(0,r+|x|)\setminus B(0,r-|x|)} (r^2-(r-|x|)^2)\mathrm{d}\nu(y)$$
$$\leqslant 2r|x|(\nu(B(0,r+|x|))-\nu(B(0,r-|x|))$$
$$=2r|x|c((r+|x|^s-(r-|x|)^s)$$
$$=O(|x|^2)$$

于是，从式(9.17)、(9.20) 及直接微分公式得

$$-2z\cdot g(r)=z\cdot\nabla Q_r(0)$$
$$=Q_r(z)-Q_r(0)+o(z)$$
$$=o(z)$$

这是因为：如果$0,z\in \mathrm{spt}\nu$，则 $Q_r(0)=Q_r(z)(=2cr^{2+s}/(2+s)$，利用式(9.16)，从式(9.19) 直接积分可得.) 由此立得式(9.18)。

假如本命题不成立，则对某非整数 $s$ 及整数 $n,0<s<n$，存在 $\mathbb{R}^n$ 上 $s$- 均匀测度 $\nu_0$ 。设 $n$ 是可能的最小整数。则可以由找到 $\mathbb{R}^{n-1}$(其中 $\mathbb{R}^0=\{0\}$) 中的 $s$- 均匀测度而得出矛盾 。

$\mathrm{spt}\nu_0$ 必定是 $\mathbb{R}^n$ 的真子集，否则以小球填充单位球 $B(0,1)$，并利用式(9.16) 及 $s<n$ 可推出 $\nu_0(B(0,1))=\infty$ .(注意这就是利用到的 $s$ 是非整数的地方.) 选取 $y\in\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{spt}\nu_0$，设 $r>0$ 是使得 $B(y,r)\cap\mathrm{spt}\nu_0\neq\phi$ 的最小数，并取$x\in B(y,r)\cap\mathrm{spt}\nu_0$ 。然后选取 $\nu\in\mathrm{Tan}(\nu_0,x)$，则容易看出 $0\in\mathrm{spt}\nu\subset H$，其中 $H$ 是半空间 $\{z\in\mathbb{R}^n:z\cdot e\geqslant 0\}$，这里 $e$ 是在 $x$ 点与 $B(y,r)$ 正交的外向单位向量。($x$ 点周围放大时，内部不包含 $\mathrm{spt}\nu$ 中的点的球 $B(y,r)$ 扩张成半空间 $\mathbb{R}^n\setminus H$。) 由引理 9.5 知：$\nu$ 是 $s$- 均匀的，即对任意 $z\in\mathrm{spt}\nu$ 及 $r>0,\nu(B(z,r))=c_0r^s$。 由引理 9.1(c)，$0\in\mathrm{spt}\nu$。定义 $g(r)$ 是测度 $\nu$ 限制在 $B(0,r)$上的质量中心，则式(9.18) 成立 。

如果对任意$r>0$，$g(r)=0$，则由于 $\mathrm{spt}\nu$ 位于半空间 $H$ 中，并且 $\nu$ 限制到 $B(0,r)$ 上的质量中心位于边界超平面 $\partial H$ 中，则对任意 $r>0$，必然有 $\mathrm{spt}\nu\cap B(0,r)\subset\partial H$。所以 $\mathrm{spt}\nu\subset\partial H$，因而如果

把 $\partial H$ 与 $\mathbb{R}^{n-1}$ 看作是等同的，即有 $\nu$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的 $s$-均匀测度。

另一方面，如果存在 $r>0$，使 $g(r)\neq 0$，可以取 $\nu_1=\lim\limits_{k\to\infty} r_k^{-s}F_{0,r_k}[\nu]\in \mathrm{Tan}(\nu,0)$，而由引理 9.5知 $\nu_1$ 是 $s$-均匀的。对给定的 $\eta>0$，$R>0$，定义 $A=\{z\in B^0(0,R):|z\cdot g(r)|>\eta|z|\}$ 则由弱收敛性质(1.26)

$$
\begin{aligned}
\nu_1(A) &\leqslant \liminf_{k\to\infty} r_k^{-s}F_{0,r_k}[\nu](A)=\liminf_{k\to\infty} r_k^{-s}\nu(r_kA)\\
&=\liminf_{k\to\infty} r_k^{-s}\nu\{z\in B(0,r_kR):|z\cdot g(r)|>\eta|z|\}\\
&=0
\end{aligned}
$$

这是因为：如果 $z\in B(0,rR)\cap \mathrm{spt}\nu$，并且 $r$ 充分小，则由式(9.18)，$|z\cdot g(r)|\leqslant \eta|z|$。所以对任意 $\eta>0$，$R>0$ 有 $\nu_1(A)=0$，因此 $\mathrm{spt}\nu_1\subset\{z:\ z\cdot g(r)=0\}$，再一次把这一超平面与 $\mathbb{R}^{n-1}$ 看作相同，就得到一个 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的 $s$-均匀测度。 □

由给出的这个 $s$-均匀测度的性质，可直接得到有关密度的结果。

**定理 9.7**

设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有限测度，又设 $s\geqslant 0$。假定满足：

$$0<\underline{D}^s(\mu,x)=\overline{D}^s(\mu,x)<\infty \tag{9.21}$$

(即密度存在且是非负有限)的 $x$ 的集合具有正测度，则 $s$ 是整数，且 $0\leqslant s\leqslant n$。

**证明** 由引理 9.1(a) 知，在任意 $x$ 点处，$\mu$ 具有使式(9.21) 成立的切线测度。所以由命题 9.3，可选取 $x$，对这一 $x$ 存在漂移不变测度 $\nu\in \mathrm{Tan}(\mu,x)$。这样对任意 $z\in \mathrm{spt}\nu$，$F_{z,1}[\nu]\in \mathrm{Tan}(\mu,x)$，并且由引理 9.1(b)，对任意 $R>0$:

$$\underline{D}^s(\mu,x)\leqslant (2R)^{-s}(F_{z,1}[\nu])(B(0,R))=(2R)^{-s}\nu(B(z,R))\leqslant \overline{D}^s(\mu,x)$$

由式(9.21)知：对任意 $z\in \mathrm{spt}\nu$ 及任意 $R>0$，有 $\nu(B(z,R))=2^sD^s(\mu,x)R^s$，所以由命题 9.6 即知 $s$ 是整数。 □

容易得出关于$s$-集密度的相应结果。

**系 9.8**

设$E$是$\mathbb{R}^n$中的$s$-集，其中$s$不是整数。则对$\mathcal{H}^s$-几乎所有的$x\in E$, $\underline{D}^s(E,x)<\overline{D}^s(E,x)$。

**证明** 设$\mu=\mathcal{H}^s|_E$，则对$\mu$-几乎所有的$x$, $0<\overline{D}^s(\mu,x)=\overline{D}^s(E,x)<\infty$(见练习9.1)。这样或者对于$\mu$-几乎所有的$x$, $0\leqslant\underline{D}^s(\mu,x)<\overline{D}^s(\mu,x)$，此即要证明的(由于$\underline{D}^s(\mu,x)=\underline{D}^s(E,x)$, $\overline{D}^s(\mu,x)=\overline{D}^s(E,x)$)，或者在一正测度集上有$0<\underline{D}^s(\mu,x)=\overline{D}^s(\mu,x)$，而在此情况下，由定理9.7可知$s$必为整数。 □

密度$D^s(\mu,x)$的几乎处处存在，不仅意味着$s$是整数，而且也说明$\mu$是$s$-可求长测度。(测度$\mu$称为是$s$-可求长的，如果它对$\mathcal{H}^s$绝对连续，即只要$\mathcal{H}^s(A)=0$，就有$\mu(A)=0$，并且存在$s$-可求长集$E$使$\mu(\mathbb{R}^n\setminus E)=0$，见2.1节。)设$s$是整数，$\mu$是满足：对几乎所有的$x$, $0<\underline{D}^s(\mu,x)\leqslant\overline{D}^s(\mu,x)<\infty$的测度。则可以证明：$\mu$是$s$-可求长的，当且仅当对几乎所有的$x$，切线空间$\mathrm{Tan}(\mu,x)$只包含单个测度$\nu$，而且$\nu$是$\mathcal{H}^s$的倍数在$\mathbb{R}^n$的某个$s$-维子空间上的限制。这也许并不令人惊奇，通过进一步研究$s$-均匀测度的性质，并将之应用于切线测度，可以导出下面的难于推证的定理及其推论。

**定理 9.9**

$\mu$是$\mathbb{R}^n$上的测度，设对$\mu$-几乎所有的$x$，密度$D^s(\mu,x)$存在，且$0<D^s(\mu,x)<\infty$。则$s$是整数，而$\mu$是$s$-可求长的。

**证明** 略。 □

系 9.10

设 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $s$-集。则 $E$ 是 $s$-可求长的，当且仅当 $D^s(E,x)$ 对 $\mathcal{H}^s$-几乎所有的 $x \in E$ 存在。

**证明** 在定理 9.9 中取 $\mu = \mathcal{H}^s|_E$，即表明系中的条件是充分的，因为几乎处处有 $\overline{D}^s(E,x) > 0$。 □

密度的"度量"概念与可求长的"几何"概念之间的相互作用是几何测度论的核心，而切线测度是联系这些概念的主要工具。

下面对非整数的 $s$，利用切线测度来比较密度与平均密度。为此先研究 $\mu$ 在 $x$ 处的"密度函数" $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，其定义为：

$$g(t) = \frac{\mu(B(x, e^{-t})}{(2e^{-t})^s} \tag{9.22}$$

由定义，$\mu$ 在 $x$ 处的($s$－维)下密度由

$$\underline{D}^s(\mu,x) = \liminf_{t \to \infty} g(t) \tag{9.23}$$

给出，而下平均密度由

$$\underline{A}^s(\mu,x) = \liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t)\mathrm{d}t \tag{9.24}$$

给出。对于上密度有类似的表述式，见式(6.21)。

首先证明：如果密度与相应的平均密度相等，则在一个较长的区间上 $g(t)$"接近常数"。

引理 9.11

设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的测度，$s>0$，又设 $x$ 满足

$$0 < \underline{D}^s(\mu,x) \leqslant \overline{D}^s(\mu,x) < \infty \tag{9.25}$$

假定存在 $d>0$，使

$$\underline{A}^s(\mu,x) = \underline{D}^s(\mu,x) = d \tag{9.26}$$

或

$$\overline{A}^s(\mu,x)=\overline{D}^s(\mu,x)=d \tag{9.27}$$

则对给定的 $\varepsilon>0$ 及 $\lambda_0>0$ 存在充分大的 $T$ 使得对任意的 $t\in[T,T+\lambda_0]$

$$d-\varepsilon<g(t)<d+\varepsilon \tag{9.28}$$

**证明** 只给出在式(9.27)的条件下的证明，在式(9.26)下的情况类似可证。函数 $g$ 增加的速率由下式控制：对 $t>u$

$$\begin{aligned} g(t)&=2^{-s}e^{s(t-u)}e^{su}\mu(B(x,e^{-t}))\\ &\leqslant e^{s(t-u)}2^{-s}e^{su}\mu(B(x,e^{-u}))\\ &\leqslant e^{s(t-u)}g(u) \end{aligned}\tag{9.29}$$

显然由式(9.27)知，式(9.28)右边的不等式对所有充分大的 $t$ 成立。特别，给定 $0<\delta<1$ 时，可以找到 $T_0$ 使得：如果 $t>T_0$ 则

$$g(t)\leqslant d+\frac{1}{2}\eta(\lambda_0+1)^{-1} \tag{9.30}$$

其中 $\eta=d(\delta-(1-e^{-s\delta})/s)>0$。假定 $\tau\geqslant T_0$ 并且存在 $u\in[\tau,\tau+\lambda_0]$ 使 $g(u)\leqslant de^{-s\delta}$，由式(9.29)，$g(t)\leqslant de^{s(t-u-\delta)}\leqslant d$ 对 $u\leqslant t\leqslant u+\delta$ 成立，因此

$$\int_u^{u+\delta}(g(t)-d)\mathrm{d}t\leqslant\int_u^{u+\delta}d(e^{s(t-u-\delta)}-1)\mathrm{d}t=d((1-e^{-s\delta})/s-\delta)=-\eta$$

记 $\lambda=\lambda_0+1$，由式(9.30)

$$\begin{aligned} \int_\tau^{\tau+\lambda}(g(t)-d)\mathrm{d}t&\leqslant\int_u^{u+\delta}(g(t)-d)\mathrm{d}t+\int_{[\tau,\tau+\lambda]\setminus[u,u+\delta]}(g(t)-d)\mathrm{d}t\\ &\leqslant-\eta+\lambda\times\frac{1}{2}\eta\lambda^{-1}=-\frac{1}{2}\eta \end{aligned}\tag{9.31}$$

设存在 $T_1\geqslant T_0$，对任意 $m=0,1,2\cdots$ 存在 $u\in[T_1+m\lambda,T_1+m\lambda+\lambda_0]$ 使 $g(u)\leqslant de^{-s\delta}$。则如果 $T\geqslant T_1$ 并且 $M$ 是使 $M\lambda\leqslant T-T_1$ 成立的最大整数，当 $T\to\infty$ 时

$$\frac{1}{T}\int_0^T(g(t)-d)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^{T_1}(g(t)-d)\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\sum_{m=0}^{M-1}\int_{T_1+m\lambda}^{T_1+(m+1)\lambda}(g(t)-d)\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{T}\int_{T_1+M\lambda}^{T}(g(t)-d)\mathrm{d}t$$

上述和式中的第一项、第三项趋于 0, 因此由式(9.31)

$$\overline{A}^s(\mu,x)-d=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=0}^{M-1}\int_{T_1+m\lambda}^{T_1+(m+1)\lambda}(g(t)-d)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\limsup_{T\to\infty}\frac{-M\eta}{2T}=\frac{-\eta}{2\lambda}<0$$

这与式(9.27)矛盾。所以可得出结论，存在充分大的 $T$, 使对任意的 $u\in[T,T+\lambda]$, $g(u)>d\mathrm{e}^{-s\delta}$。此即式(9.28)左边的不等式，只要 $\delta>0$ 选得充分小使得 $d-\varepsilon<d\mathrm{e}^{-s\delta}$。 □

可以用切线测度的术语来解释引理 9.11。

**引理 9.12**

设 $\mu,x$ 和 $s$ 如引理 9.11 所述，满足式(9.25), 并且满足式(9.26)或式(9.27)中的一个。则存在 $\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 使得对任意 $R>0$, $\nu(B(0,R))=(2R)^s d$ 。

**证明** 由引理 9.11, 可找到数列 $t_k\nearrow\infty$, 使得对任意 $t\in[t_k-\log k,\ t_k+\log k]$.

$$d-1/k<g(t)<d+1/k$$

所以令 $r_k=e^{-t_k}$, 利用式(9.22)中 $g$ 的定义，知对任意 $r\in[r_k/k,kr_k]$

$$d-1/k<\mu(B(x,r))/(2r)^s<d+1/k\ 。$$

对任意 $R>0$, 存在 $k_0$ 使得对任意 $k\geqslant k_0$, 有 $r_k/k\leqslant r_kR\leqslant kr_k$,由此得出：当 $k\to\infty$ 时

$$r_k^{-s}F_{x,r_k}[\mu](B(0,R))=r_k^{-s}\mu(B(x,r_kR))$$

$$=(2R)^s(2r_kR)^{-s}\mu(B(x,r_kR))\to 2^sR^sd$$

上式对开球 $B^0(0.R)$ 同样成立，取 $\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 是序列 $r_k^{-s}F_{x,r_k}[\mu]$ 的弱极限，由式(1.25)及(1.26)可得 $\nu(B(0,R))=(2R)^sd$ 。 □

利用引理 9.12 的处理方法，容易把命题 9.4 的证明改写成涉及到平均密度的更强的结果。

**定理　9.13**

设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的测度，并且对 $\mu$- 几乎所有的 $x$，$0<\underline{D}^s(\mu,x)\leqslant\overline{D}^s(\mu,x)<\infty$，如果 $0<s<1$，则对 $\mu$- 几乎所有的 $x$，

$$\underline{D}^s(\mu,x)<\underline{A}^s(\mu,x)\leqslant\overline{A}^s(\mu,x)<\overline{D}^s(\mu,x) \tag{9.32}$$

**证明**，假定在具有正测度的 $x$ 集上，$0<\underline{D}^s(\mu,x)=\underline{A}^s(\mu,x)$。由命题 9.3，可选取 $x$ 使得每一 $\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 都是漂移不变的，对此 $x$ 记 $d\equiv\underline{D}^s(\mu,x)=\underline{A}^s(\mu,x)>0$。由引理 9.12，可选取 $\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 使 $\nu(B(0,R))=d(2R)^s$。由漂移不变性，对任意 $z\in\mathrm{spt}\nu$，$F_{z,1}[\nu]\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$，再由引理 9.1(b) 知：对任意 $R>0$，$d\leqslant(2R)^{-s}(F_{z,1}[\nu])(B(0,R))=(2R)^{-s}\nu(B(z,R))$。可以选取 $z\in\mathrm{spt}\nu$ 使 $|z|=1$，否则 $\nu(B(0,R))$ 在 $R$ 的接近于1的一个区间上将为常数。当 $0<R<1$ 时，$B(z,R)\subset B(0,1+R)\setminus B^0(0,1-R)$，所以对较小的 $R$，

$$\begin{aligned}d(2R)^s&\leqslant\nu(B(z,R))\\&\leqslant\nu(B(0,1+R))-\nu(B(0,1-R))\\&=2^sd[(1+R)^s-(1-R)^s]\\&=O(R)\end{aligned}$$

这与 $0<s<1$ 是矛盾的。这就证明了不等式(9.32)的左端成立；右端的证明类似。　□

正如系 9.8 一样，可以把这一结果限定在 $s$- 集上。

**系　9.14**

设 $E$ 是 $s$-集，且 $0<s<1$。则对 $\mathcal{H}^s$-几乎所有的 $x\in E$，$\overline{A}^s(E,x)<\overline{D}^s(E,x)$。

**证明**　令 $\mu=\mathcal{H}^s|_E$，则对 $\mu$- 几乎所有的 $x$，$0<\overline{D}^s(\mu,x)=\overline{D}^s(E,x)$

$<\infty$ (见练习9.1)。于是，对 $\mu$-几乎所有的 $x$，或者 $0 \leqslant \overline{A}^s(\mu,x) < \overline{D}^s(\mu,x)$；这正是所需要的。或者$0 < \overline{A}^s(\mu,x) = \overline{D}^s(\mu,x)$在具有正测度的集上成立，但由定理 9.13 知，这种情况是不会发生的。 □

事实上，这已经说明了定理9.13的结论对所有非整数$s$成立。

## 9.3 奇异积分

这一节将很简要地介绍切线测度在另一领域——奇异积分理论中的应用，并将表明它们也是这一领域中的一个强有力的工具。

希尔伯特变换是人们最熟悉的奇异积分之一，它由下面的实积分定义：

$$(Hf)(x) = \int \frac{f(y)}{y-x}\, \mathrm{d}y \tag{9.33}$$

其中 $f \in L^1(\mathbb{R})$。这一积分应当通过它的主值来解释，即

$$(Hf)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x| \geqslant \varepsilon} \frac{f(y)}{y-x}\, \mathrm{d}y \tag{9.34}$$

希尔伯特变换的基本性质是：只要 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 积分(9.33) 对几乎所有 $x \in \mathbb{R}$ 存在且有限。换言之，在典型点 $x$ 处，奇异性对在 $x$ 两边积分的影响相互抵消。

在分形领域中考虑与希尔伯特变换类似的变换是很自然的。作为例子，设 $E$ 是三分康托集，其维数是 $s = \log 2/\log 3$, 令 $\mu = \mathcal{H}^s|_E$ 是"康托测度"，对于 $f \in L^1(\mu)$ 定义

$$\begin{aligned}(Hf)(x) &= \int \frac{(y-x)f(y)}{|y-x|^{s+1}}\, \mathrm{d}\mu(y) \\ &\equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x| \geqslant \varepsilon} \frac{(y-x)f(y)}{|y-x|^{s+1}}\, \mathrm{d}\mu(y)\end{aligned} \tag{9.35}$$

[由于对 $x \in E$ 及 $r < 1$

$$c_1 r^s \leqslant \mu(B(x,r)) \leqslant c_2 r^s \tag{9.36}$$

其中 $0<c_1\leqslant c_2<\infty$，见练习 2.11，自然会去考虑具有指数 $-s$ 的积分核；而用到 $(y-x)/|y-x|^{s+1}$ 只不过用来表示经过奇异点时，符号的变化。回顾在式(6.36)中考虑的式(9.35)的绝对值积分的奇异性状。] 下面用切线测度证明：对几乎所有的 $x$，由式(9.35)定义的变换不存在。

**命题 9.15**

设 $\mu=\mathcal{H}^s|_E$ 是康托测度，$f\in L^1(\mu)$，则对使 $f(x)\neq 0$ 的 $\mu$- 几乎所有的 $x$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{|y-x|\geqslant\varepsilon}\frac{(y-x)f(y)}{|y-x|^{s+1}}\,\mathrm{d}\mu(y)\right|=\infty \tag{9.37}$$

从而 $(Hf)(x)$ 不存在。

**证明** 为避免不必要的复杂的记号，把 $(y-x)|y-x|^{-s-1}$ 简记为 $(y-x)^{-s}$，理解它为一实数且与 $y-x$ 有相同的符号。这里只给出对所有 $x$，$f(x)=1$ 的情形的证明。对一般的 $f\in L^1(\mu)$，只须稍加修改即可，见练习 9.8。

假设存在使 $\mu(X_0)>0$ 的集 $X_0\subset E$，并设对任意 $x\in X_0$，积分 $\int_{|y-x|\geqslant\varepsilon}(y-x)^{-s}\mathrm{d}\mu(y)$ 对 $0<\varepsilon\leqslant 1$ 有界，即存在数 $c(x)$，使得对任意 $0<\delta\leqslant\varepsilon\leqslant 1$

$$\left|\int_{\delta\leqslant|y-x|\leqslant\varepsilon}(y-x)^{-s}\mathrm{d}\mu(y)\right|\leqslant c(x) \tag{9.38}$$

对任意 $x\in X_0$ 成立。所以可找到实数 $c<\infty$ 和满足 $\mu(X)>0$ 的紧集 $X\subset X_0$，使对任意 $x\in X$，$c(x)\leqslant c$。固定 $x\in\operatorname{spt}\mu$ 为 $X$ 的任意稠密点(见式(9.8))，考察在 $x$ 点处 $\mu$ 的切线测度。选取 $\nu=\lim_{k\to\infty}r_k^{-s}F_{x,r_k}[\mu]\in\operatorname{Tan}(\mu,x)$，且设 $z\in\operatorname{spt}\nu$。由引理 9.2 知：存在数列 $x_k\in X$ 使 $z_k\equiv(x_k-x)/r_k\to z$。再由引理 9.1(b) 和式(9.36)知 $\nu$ 没有原子(即对任意 $y,\nu(\{y\})=0$)。利用式(9.5)的推广及 $z_k$ 的定义

$$\begin{aligned}
&\int_{r\leqslant|y-z|\leqslant R}(y-z)^{-s}\mathrm{d}\nu(y)\\
&=\lim_{k\to\infty}\int_{r\leqslant|y-z_k|\leqslant R}(y-z_k)^{-s}\mathrm{d}\nu(y)\\
&=\lim_{k\to\infty}r_k^{-s}\int_{r\leqslant|y-z_k|\leqslant R}(y-z_k)^{-s}\mathrm{d}(F_{x,r_k}[\mu])(y)\\
&=\lim_{k\to\infty}r_k^{-s}\int_{r\leqslant|(y-x)/r_k-z_k|\leqslant R}((y-x)/r_k-z_k)^{-s}\mathrm{d}\mu(y)\\
&=\lim_{k\to\infty}\int_{rr_k\leqslant|y-x_k|\leqslant Rr_k}(y-x_k)^{-s}\mathrm{d}\mu(y)
\end{aligned}\tag{9.39}$$

由于 $x_k\in X$, 故由式(9.38) 知，

$$\left|\int_{r\leqslant|y-z|\leqslant R}(y-z)^{-s}\mathrm{d}\nu(y)\right|\leqslant\limsup_{k\to\infty}c(x_k)\leqslant c\tag{9.40}$$

对任意$\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$, $z\in\mathrm{spt}\nu$ 及 $0<r\leqslant R$ 成立 。

但对 $\mu$- 几乎所有的 $x\in E$, 测度 $\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 是$\mathcal{H}^s$ 在延拓了的康托集：

$E'=\{a_m\cdots a_1\cdot b_1b_2\cdots$ 是三进展开式，对任意 $i$, $a_i$, $b_i=0$ 或 $2\}$

上的限制 。取这样的 $x\in X$ 及 $0\in\mathrm{spt}\nu$, 由引理 9.1(b) 知，存在 $c_1,c_2>0$ 使 $c_1r^s\leqslant\nu(B(0,r))\leqslant c_2r^s$ ，因此，通过分部积分：

$$\begin{aligned}
\int_{r\leqslant y\leqslant R}(y-0)^{-s}\mathrm{d}\nu(y)&=[y^{-s}\nu(B(0,y))]_r^R+s\int_r^R y^{-s-1}\nu(B(0,y))\mathrm{d}y\\
&\geqslant-c_2+c_1s\int_r^R y^{-1}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

取 $r$ 充分小可使上式任意大，这与式(9.40) 矛盾，命题得证 。□

命题 9.15 的证明利用了式(9.38) — 关于 $\mu$ 的积分的界，从而推出了式(9.40) — 关于切线测度积分的界。对于适当选取的切线测度，可以较容易地证明后一个性质不成立 。但命题 9.15

及其证明，对于一大类测度 $\mu$ 成立，例如 $\mathcal{H}^s$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的具有强分离条件的任意自相似 $s$- 集上的限制 。事实上，下列关于向量积分的更一般的结论也是成立的 。注意，式(9.42)导致了下面的结果：如果将 $\nu$ 限制在中心在 $\mathrm{spt}\nu$ 的球上，则每个球的质量中心正好在该球的中心，从这点看来，式(9.42)是一个很强的结论 。

**命题　9.16**

设 $s>0$，$\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上有限测度，满足对几乎所有的 $x$，$0<\underline{D}^s(\mu,x)\leqslant\overline{D}^s(\mu,x)<\infty$，又知极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}\frac{(y-x)}{|y-x|^{s+1}}\,\mathrm{d}\mu(y) \tag{9.41}$$

存在且有限。则对几乎所有的 $x$

$$\int_{B(z,r)} y\,\mathrm{d}\nu(y)=z\nu(B(z,r)) \tag{9.42}$$

对任意 $\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$，$z\in\mathrm{spt}\nu$ 以及 $r>0$ 成立 。特别由此可推出 $s$ 是整数，并且 $\mu$ 是 $s$- 可求长测度 。

**证明梗概**　从极限(9.41)的存在性可推出：

$$\lim_{0<\varepsilon<\delta\to 0}\int_{\varepsilon\leqslant|y-x|\leqslant\delta}(y-x)/|y-x|^{s+1}\mathrm{d}\mu(y)=0 \tag{9.43}$$

利用 Egoroff 定理，可找到满足 $\mu(X)>0$ 的集 $X$，使上式在 $X$ 上一致收敛 。与命题 9.15 的证明类似，可以再一次得到式(9.39)，将其转化成切线测度，由式(9.43)得出

$$\int_{r\leqslant|y-z|\leqslant R}(y-z)/|y-z|^{s+1}\mathrm{d}\nu(y)=0 \tag{9.44}$$

对任意 $\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$，$z\in\mathrm{spt}\nu$ 以及任意 $0<r\leqslant R$ 成立。为了导出式(9.42)，考虑积分

$$I_\phi=\int(y-z)\,\phi(|y-z|)\mathrm{d}\nu(y)$$

其中 $\phi:[0,\infty]\to\mathbb{R}$，由式(9.44)知，如果 $\phi(t)=t^{-s-1}1_{[r,R]}'(t)$则 $I_\phi=0$，其中 1 是示性函数。由这种函数的线性组合来逼近 $1_{[0,R]}'(t)$，即得 $\int_{0\leqslant|y-z|\leqslant R}(y-z)\mathrm{d}\nu(y)=0$，这就是式(9.42)。

现在假定 $\nu$ 是满足式(9.42)的测度，且对 $z\in \mathrm{spt}\nu$，$c_1r^s\leqslant\nu(B(z,r))\leqslant c_2r^s$（如同前面一样，由引理 9.1(b) 及 $\mu$ 密度的有界性知，后一个条件对 $\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 成立）。利用命题 9.6 证明的思想，可以证明：$s$ 是整数，而 $\nu$ 是 $\mathcal{H}^s$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的 $s$-维子空间上的限制。把切线测度的这个性质再变换成原来测度 $\mu$ 的性质，就能得到 $\mathrm{spt}\mu$ 是可求长的，且 $\mu$ 对 $\mathcal{H}^s$ 在 $\mathrm{spt}\mu$ 上的限制绝对连续。这里略去了证明的细节。 □

当 $s=n$ 且 $\mu$ 是 $n$-维勒贝格测度在有界波雷尔集上的限制时，积分(9.41)几乎处处存在。也可以证明，当 $\mu$ 是 $\mathcal{H}^s$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中可求长 $s$-集上的限制时(其中 $s$ 是整数)，积分主值(9.41)存在。更进一步，对任何关于上述测度绝对连续的测度，式(9.41)存在。(回顾一下，可求长集是由若干个 $s$-维 $C^1$ 集的子集所组成(见 2.1 节))。由此，命题 9.16 给出了这些 $\mathbb{R}^n$ 上测度的良好特性 — 对于它们，奇异积分(9.35)存在。一般地，对于分形测度奇异积分不存在。

## 9.4 注记与参考文献

切线测度的概念由 Preiss(1987) 在他的论文中引入，此文统一并拓展了密度，切线以及可求长的理论，而这些理论早在 60 年前就已发展起来了。为了理解这一工作以及切线测度的许多进一步的应用，可参见 Mattila(1995*a*) 的书，同时书中包含有关几何测度论领域的大量的文献目录。Preiss (1987) 和 Mattila (1995*a*) 得到了 $s$-均匀测度的更强的性质，并使用这些结果来研究密度和可求长性。命题 9.4 和定理 9.7 关于密度和整数维

数的初始证明属于 Marstrand(1954), 并由 Falconer 和 Springer (1995) 推广到平均密度，对于一般的 $s$, 则是由 Marstrand(1996) 给出有关的结论 。利用切线测度来研究奇异积分是由 Mattila (1995$b$) 及 Mattila 和 Preiss(1995) 首创的，这一领域的全貌可再一次在 Mattila (1995$a$) 中找到 。对于集的局部形式这一相关的拓扑理论由 Wicks(1991) 给出 。

## 练习

9.1 证明： 如果 $E$ 是 $s$-集， 则 $0<\overline{D}^s(E,x)<\infty$ 对 $\mathcal{H}^s$-几乎所有的 $x\in E$ 成立 。

9.2 对任意 $x\in\mathbb{R}^2$ 找出 $\mathrm{Tan}(\mu,x)$, 其中 $\mu$ 是平面上的勒贝格测度在单位圆盘 $B(0,1)\subset\mathbb{R}^2$ 上的限制。

9.3 设 $E$ 是三分康托集，$s=\log 2/\log 3$ ，$\mu$ 是 $\mathcal{H}^s$ 在 $E$ 上的限制 。试描述 $\mathrm{Tan}(\mu,0)$ 。

9.4 设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上测度,$f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$连续，在 $\mathbb{R}^n$ 上定义测度 $\mu_f$: $\mu_f(A)=\int_A f\mathrm{d}\mu$,其中 $A$ 是波雷尔集。证明：如果$f(x)>0$, 则 $\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$当且仅当 $f(x)\nu\in\mathrm{Tan}(\mu_f,x)$。又如果 $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$仅为局部可积，则这一结论对 $\mu$-几乎所有的使$f(x)>0$ 的 $x$ 仍然成立 。(提示：对后一部分使用Lusin 定理，即对 $\varepsilon>0$ 存在集$A$，$\mu(\mathbb{R}^n\backslash A)<\varepsilon$，使得 $f$在 $A$ 上的限制连续 。)

9.5 设 $E$ 是三分康托集，$s=\log 2/\log 3$, $\mu=\mathcal{H}^s|_E$ 。令$f: E\to E$ 由 $f(x)=3x \pmod 1$ 定义，试证对任意 $x\in E$, $\mathrm{Tan}(\mu,x)=\mathrm{Tan}(\mu,f(x))$。(这一发现导致了 $\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 的各种遍历性质。)

9.6 推广命题 9.3, 证明: 对 $\mu$-几乎所有的 $x$ 和每个$\nu\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$, $F_{z,r}[\nu]\in\mathrm{Tan}(\mu,x)$ 对任意 $z\in\mathrm{spt}\nu$ 及 $r>0$ 成立 。

9.7 切线测度可用以研究集的角分布。设 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $s$-集，$0<s<n$。设 $\eta>0$ ，对每一 $x\in\mathbb{R}^n$ 及单位向量 $\theta$ ，定义锥体

$C(x,\theta,\eta)=\{y\in\mathbb{R}^n: (y-x)\cdot\theta>\eta|y-x|\}$。证明：对 $\mu$- 几乎所有的 $x\in E$，存在单位向量 $\theta$ 使得：

$$\liminf_{r\to 0} r^{-s}\mathcal{H}^s(E\cap B(x,r)\cap C(x,\theta,\eta))=0$$

（提示：如命题 9.6 的证明一样，必存在 $\mu$ 的包含在半空间的切线测度，如果这一结果不正确则是不可能的。）

9.8　对任意 $f\in L^1(\mu)$ 证明命题 9.15。(利用练习 9.4 给出的 Lusin 定理。)

9.9　如果对任意 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是紧支撑上的李卜希兹函数，证明：希尔伯特变换 (9.34) 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 存在。（提示：证明积分 $\int_{|y-x|\geqslant\varepsilon}f(y)(y-x)^{-1}\mathrm{d}y$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时，满足哥西收敛准则。）

# 第10章　测度的维数

自从20世纪早些时候，不规则集最初吸引了数学工作者的注意以来，测度已成为研究这些现在称之为"分形"集的基本工具。前面已见过不少这样的例子，通过研究以该集为支撑的测度的性质来分析这个集合，然而，分形结构经常本质上已经是测度。例如，当动力系统的吸引子通过描绘迭代的点序列显示在计算机屏幕上时，实际上被观测到的是测度而不是吸引子集合：一个区域的测度是由落在此区域上的迭代点的点的比例给出的。

在10、11两章中，将研究本身作为分形实体的测度，以及与它们相联系的那些集合的相关性质。还发展了测度的维数和局部维数的思想．考察了这样的集合 $E_s$，在这种集合上，给定的测度 $\mu$ 的局部维数恰好为 $s$；这样的集合对某个范围的 $s$ 可能很"大"。在这一章中，用 $\mu$ 本身去度量这样的集合，而在11章则由维数引出多重分形谱的概念。

## 10.1　局部维数和测度维数

集合的豪斯道夫和填充维数理论大部分都取决于适当定义的测度的局部性质，现在就研究这种自身所具有的局部性质。本章涉及的测度 $\mu$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 上的有限波雷尔规则测度，所以特别有 $0<\mu(\mathbb{R}^n)<\infty$。

回顾式(2.15)及(2.16)，所谓 $\mu$ 在 $x\in\mathbb{R}^n$ 的下、上局部或点维数是由下两式给出：

$$\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(x)=\liminf_{r\to0}\frac{\log\mu(B(x,r))}{\log r}\tag{10.1}$$

$$\overline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x)=\limsup_{r\to 0}\frac{\log\mu(B(x,r))}{\log r} \tag{10.2}$$

并且如果上两式相等，则称在 $x$ 点局部维数存在，记这个共同值为 $\dim_{\text{loc}}\mu(x)$。于是，局部维数描述的是 $r$ 较小时，$\mu(B(x,r))$ 服从的幂规律的状况，如果在 $x$ 附近 $\mu$ 是"高度压缩"的，则 $\dim_{\text{loc}}\mu(x)$ 比较小。注意如果 $x$ 在 $\mu$ 的支撑之外，则 $\dim_{\text{loc}}\mu(x)=\infty$，而如果 $x$ 是 $\mu$ 的原子，则 $\dim_{\text{loc}}\mu(x)=0$。为了技术上的完整性，注意到可以用通常的方法证明映射 $x\mapsto \underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x)$ 是波雷尔可测的，所以对所有的 $c$，像 $\{x:\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x)<c\}$ 这样的集都是波雷尔集，上局部维数也有类似的性质。

记 $\mu|_E$ 为 $\mu$ 在波雷尔集 $E$ 上的限制（所以 $\mu|_E(A)=\mu(E\cap A)$），注意到对 $\mu$-几乎所有的 $x\in E$，

$$\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu|_E(x)=\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x)$$

及

$$\overline{\dim}_{\text{loc}}\mu|_E(x)=\overline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x) \tag{10.3}$$

这很容易由命题 1.7 得到，这表明集上的几乎所有的点都是密度点，参见练习 10.2。

命题 2.3 和 2.4 阐述了集合的豪斯道夫维数和填充维数与此集为支撑的测度的局部性质之间的基本关系，下面复述这些关系以给出集合维数的明确表达式。

**命题 10.1**

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是非空的波雷尔集，则

$$\dim_H E=\sup\{s: 存在满足\ 0<\mu(E)<\infty 的\ \mu,\ 且对\ \mu\text{-}几乎所有的\ x\in E,\ \underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x)\geqslant s\} \tag{10.4}$$

$$=\inf\{s: 存在满足\ 0<\mu(\overline{E})<\infty 的\ \mu,\ 且对所有的\ x\in E,\ \underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x)\leqslant s\} \tag{10.5}$$

和

$$\dim_p E=\sup\{s: 存在满足\ 0<\mu(E)<\infty 的\ \mu,\ 且对\ \mu\text{-}几乎所有的\ x\in E,\ \overline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x)\geqslant s\} \tag{10.6}$$

$= \inf\{s$:存在满足 $0<\mu(\overline{E})<\infty$ 的 $\mu$, 且对所有的 $x \in E$, $\overline{\dim}_{loc}\mu(x) \leqslant s\}$ (10.7)

**证明** 从命题 2.3 和 2.4 可以直接得到上述几个表达式。 □

注意到下局部维数关系到集合的豪斯道夫测度，而上局部维数关系到填充测度。此外，测度的局部维数的下界导出集合维数的下界，对上界也有类似的关系。

这些关系提示我们利用局部维数去定义测度自身的维数可能是合理的。于是，对有限波雷尔测度 $\mu$, 定义它的豪斯道夫和填充维数为：

$$\dim_H\mu = \sup\{s: 对\ \mu\text{-几乎所有的}\ x,\ \underline{\dim}_{loc}\mu(x) \geqslant s\} \quad (10.8)$$

和

$$\dim_p\mu = \sup\{s: 对\ \mu\text{-几乎所有的}\ x,\ \overline{\dim}_{loc}\mu(x) \geqslant s\} \quad (10.9)$$

这些测度的维数可以通过相应集合的维数来表示，这几乎不会使人感到意外。

命题 10.2

对有限波雷尔测度 $\mu$

$$\dim_H\mu = \inf\{\dim_H E: E\ 是使\ \mu(E)>0\ 的波雷尔集\} \quad (10.10)$$

及

$$\dim_p\mu = \inf\{\dim_p E: E\ 是使\ \mu(E)>0\ 的波雷尔集\} \quad (10.11)$$

**证明** 应用命题 10.1 到定义式(10.8)和(10.9), 先取 $s<\dim_H\mu$, 如果 $E_0$ 是使 $\mu(\mathbb{R}^n\setminus E_0)=0$ 的波雷尔集，则对任意 $x\in E_0$, $\underline{\dim}_{loc}\mu(x) \geqslant s$ 。给定满足 $\mu(E)>0$ 的波雷尔集 $E$, 则对任意 $x\in E\cap E_0$, $\underline{\dim}_{loc}\mu(x) \geqslant s$, 在这里 $\mu(E\cap E_0)=\mu(E)>0$。故由命题 2.3($a$) 或式(10.4), 对所有这样的集合 $E$,

$$s \leqslant \dim_H(E\cap E_0) \leqslant \dim_H E,$$

由此即知 $\dim_{\mathrm{H}}\mu$ 不大于式(10.10)的右边。

为了得到相反的不等式，设 $s>\dim_{\mathrm{H}}\mu$，由式(10.8)，如果 $E$ 是使 $\mu(E)>0$ 的波雷尔集，则对任意 $x\in E$，$\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(x)<s$，由命题2.3(b)或式(10.5)，即知 $\dim_{\mathrm{H}}E\leqslant s$，这正是所需要的。

利用命题 2.3(c)、(d) 或式(10.6) 和(10.7)，可以类似地证明式(10.11)。 □

由下两式定义的测度的上豪斯道夫维数及上填充维数有时是有用的。

$$\dim^*_{\mathrm{H}}\mu=\inf\{s:\text{对}\mu\text{-几乎所有的 }x,\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(x)\leqslant s\} \tag{10.12}$$

和

$$\dim^*_{\mathrm{p}}\mu=\inf\{s:\text{对}\mu\text{-几乎所有的}x,\overline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(x)\leqslant s\} \tag{10.13}$$

显然 $\dim_{\mathrm{H}}\mu\leqslant\dim^*_{\mathrm{H}}\mu$ 及 $\dim_{\mathrm{p}}\mu\leqslant\dim^*_{\mathrm{p}}\mu$

这些维数同样也可以通过集合的维数表示。

**命题 10.3**

对有限波雷尔测度 $\mu$，

$$\dim^*_{\mathrm{H}}\mu=\inf\{\dim_{\mathrm{H}}E: E\text{是使 }\mu(\mathbb{R}^n\backslash E)=0\text{ 的波雷尔集}\} \tag{10.14}$$

和

$$\dim^*_{\mathrm{p}}\mu=\inf\{\dim_{\mathrm{p}}E: E\text{ 是使 }\mu(\mathbb{R}^n\backslash E)=0\text{的波雷尔集}\} \tag{10.15}$$

**证明** 此命题的证明与命题 10.2 的证明完全类似。参见练习 10.4。 □

为举例说明这些概念，下面计算[0,1]上的一族自相似测度的维数和局部维数，设 $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}$，按 $p:(1-p)$ 的比例，不断地把测度值细分到二进制的区间，以这样的方法在区间[0,1]上定义自相似概率测度 $\mu_{\mathrm{p}}$，见图 10.1。用 $X_{i_1\cdots i_k}$ 表示在二进小数展开式开始 $k$ 位小数是 $0,i_1\cdots i_k$ 的数组成的闭区间，其中 $i_j=1$ 或 0，$j=1,\cdots,k$，

则

$$\mu_p(X_{i_1\cdots i_k})=p^{n_0}(1-p)^{n_1} \tag{10.16}$$

其中 $n_0$ 和 $n_1$ 分别表示在序列$(i_1\cdots i_k)$中出现的 0 和 1 的个数。于是，这个自相似测度 $\mu_p$ 实际上就是由式(2.44)－(2.45) 定义的测度，其中 $F_1(x)=\frac{1}{2}x$，$F_2(x)=\frac{1}{2}(x+1)$，及 $p_1=p, p_2=1-p$。

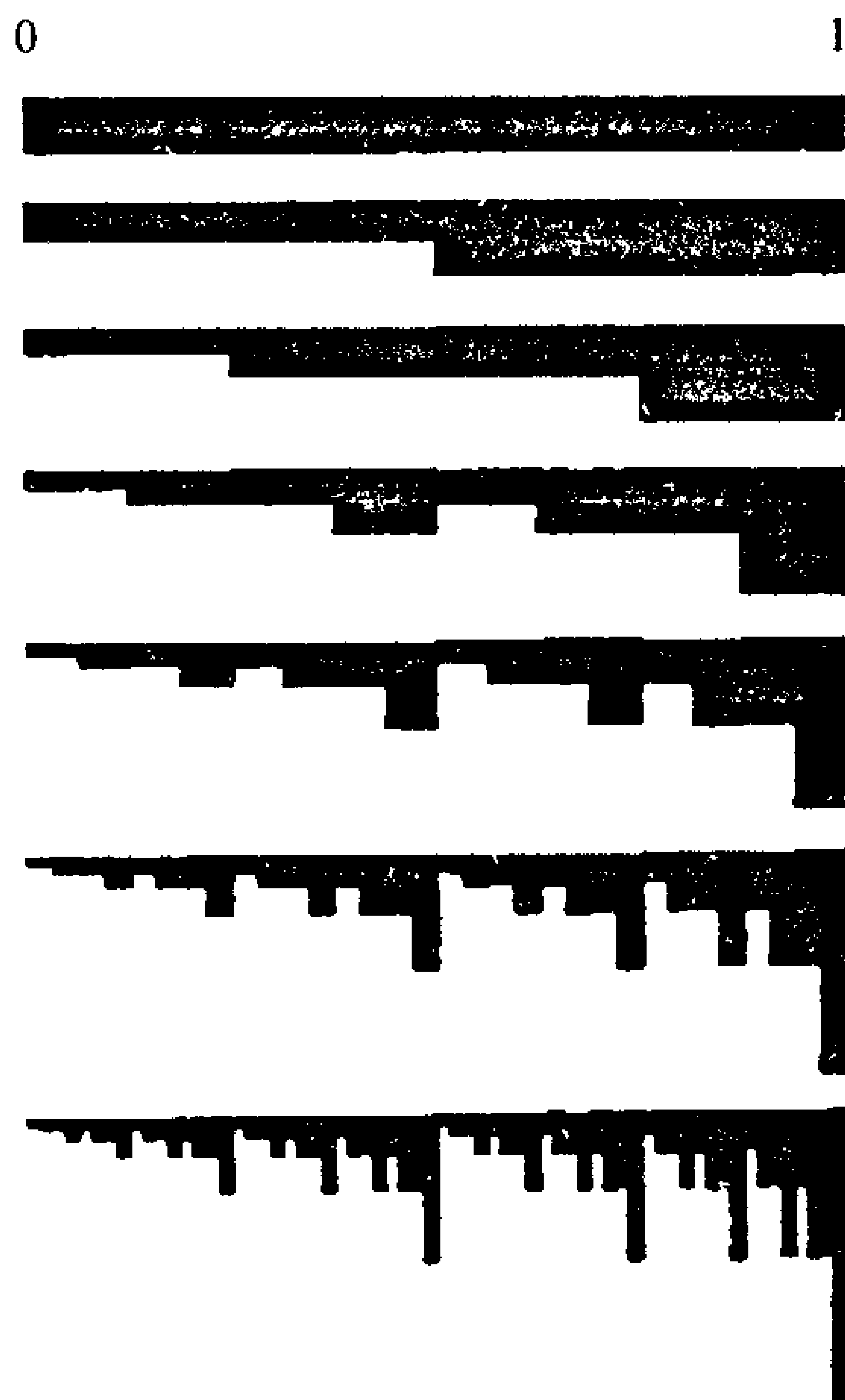



图 10.1　命题 10.4 中的自相似测度的结构：按比例 $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$ 不断地进行测度细分，即取 $p=\frac{1}{3}$

下面的关于计算测度 $\mu_p$ 的维数的论证与 FG 书中命题 10.1 类似，10.2 节中需要用到此命题的最后结论。

**命题　10.4**

设 $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}$ $\mu_p$ 是如上定义的概率测度，记

$$s(p)=-(p\log p+(1-p))/\log 2 \tag{10.17}$$

则对$\mu$-几乎所有的 $x$，

$$\dim_{\mathrm{H}}\mu_p=\dim^*_{\mathrm{H}}\mu_p=s(p)=\dim_{\mathrm{p}}\mu_p=\dim^*_{\mathrm{p}}\mu_p \tag{10.18}$$

并且

$$\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu_p(x)=s(p)=\overline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu_p(x) \tag{10.19}$$

此外还存在关于 $p$ 不降的波雷尔集族 $F_p$，满足：

$$\dim_{\mathrm{H}}F_p=s(p)\quad 且\quad \mu_p(F_p)=1$$

**证明** 首先，注意到 $\mu_0$ 是在 1 的单位点测度，且 $s(0)=0$, 所以令 $F_0=\{1\}$ 即是 $p=0$ 时的结论。

下面，固定 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$，可以将 $\mu_p$ 看成是 $[0,1]$上的这样的概率测度，它引出了随机数 $x$, 使 $x$ 的二进制小数的第 $k$ 位以概率 $p$ 取 0, 以概率 $1-p$ 取 1, 数位间相互独立。对 $i=0,1$, 用$n_i(x|_k)$表示 $x\in[0,1]$的二进小数的前 $k$ 位中数 $i$ 出现的次数。则由强大数定律知，"以概率 1", 也即对 $\mu_p$ 几乎所有的 $x$，当 $k\to\infty$时，

$$n_0(x|_k)/k\ \to\ p\quad 和\quad n_1(x|_k)/k\ \to\ 1-p\ 。$$

定义波雷尔集 $K_0=F_0=\{1\}$, 而对 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$

$$K_p=\{x\in[0,1]:\lim_{k\to\infty}n_0(x|_k)/k=p\} \tag{10.20}$$

即知 $\mu_p(K_p)=1$。

对任意$x\in[0,1]$, 记 $X_k(x)$ 为包含 $x$ 的，长度等于 $2^{-k}$ 的二进制区间$X_{i_1,\cdots,i_k}$，由式(10.16)

$$\log\mu_p(X_k(x))=n_0(x|_k)\log p+n_1(x|_k)\log(1-p)$$

如果$x\in K_p$, 则对 $t\geqslant0$, 当 $k\to\infty$时，

$$\frac{1}{k}\log\frac{\mu_p(X_k(x))}{2^{-kt}}=\frac{1}{k}n_0(x|_k)\log p+\frac{1}{k}n_1(x|_k)\log(1-p)+t\log2 \tag{10.21}$$

$$\to\quad p\log p+(1-p)\log(1-p)+t\log2$$

于是，如果 $t<s(p)$( 见式(10.17)), 则

$$\lim_{k\to\infty}\mu_p(X_k(x))/|X_k(x)|^t=0$$

所以由命题 2.3(a) 简单的变形，即把其中以 $x$ 为球心的球换成包含 $x$ 的二进区间，则对每个使 $\mu_p(E)>0$ 的波雷尔集 $E$，可以得到 $\dim_H E \geqslant s(p)$ 特别有 $\dim_H K_p \geqslant s(p)$，同时由式(10.10)可得 $\dim_H \mu_p \geqslant s(p)$。

另一方面，如果 $0<q\leqslant p$ 及 $x\in K_q$，则由式(10.21)，

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\log\frac{\mu_p(X_k(x))}{2^{-kt}} &\to q\log p+(1-q)\log(1-p)+t\log 2\\ &\geqslant p\log p+(1-p)\log(1-p)+t\log 2\end{aligned}$$

这是由于当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$q(\log p-\log(1-p))=q\log(p/(1-p))$ 随 $q$ 的增加而递减。因此，如果 $t>s(p)$，则对任意 $x\in F_p\equiv\bigcup_{0<q\leqslant p}K_q$，$\lim\mu_p(X_k(x))/|X_k(x)|^t=\infty$。再利用命题 2.3(b)关于二进区间的一个类似形式，即得 $\dim_H F_p\leqslant s(p)$，而由上面的证明知 $s(p)\leqslant\dim_H K_p\leqslant\dim_H F_p$，故 $s(p)=\dim_H F_p$。注意到 $\mu_p(F_p)\geqslant\mu_p(K_p)=1$，由式(10.14)即可得 $\dim_H^*\mu_p\leqslant s(p)$，又由于 $s(p)\leqslant\dim_H\mu_p\leqslant\dim_H^*\mu_p$，这就证明了式(10.18)的前两个等号。再利用式(10.8)和(10.12)，立即可以得到对 $\mu$- 几乎所有的 $x$，$\underline{\dim}_{loc}\mu(x)=s(p)$。

关于式(10.18)右边的两个等式可以利用命题 2.3 中有关填充测度的部分，以及 $\dim_P\mu_p$ 和 $\dim_P^*\mu_p$ 相应的定义及性质平行地证明(留给读者自己练习)，因此，由式(10.9)和(10.13)，对 $\mu$ 几乎所有的$x$，$\overline{\dim}_{loc}\mu(x)=s(p)$。　□

在上面的例子中，$\underline{\dim}_{loc}\mu(x)$ 及 $\overline{\dim}_{loc}\mu(x)$ 对 $\mu$- 几乎所有的 $x$ 都是常数。实际上具有这种性质的测度经常出现，称之为具有“严格的维数”或“一致维数”。如果对 $\mu$-几乎所有的 $x$，$\underline{\dim}_{loc}\mu(x)=s$，则称测度 $\mu$ 具有严格的下维数，而如果对 $\mu$-几乎所有的 $x$，$\overline{\dim}_{loc}\mu(x)=s$，则称测度 $\mu$ 具有严格的上维数。很显然，由式(10.8),(10.12),(10.9)和(10.13)，$\mu$ 具有严格的下维数，当且仅当

$$\dim_H\mu=\dim_H^*\mu=s$$

而 $\mu$ 具有严格的上维数，当且仅当

$$\dim_{\mathrm{p}}\mu = \dim_{\mathrm{p}}^{*}\mu = s$$

正如所期望的那样，这种严格性也可以通过集合的维数来表达。

**命题 10.5**

测度 $\mu$ 具有严格的下维数 $s$，当且仅当存在波雷尔集 $E_0$，使 $\mu(\mathbb{R}^n\backslash E_0)=0$，及对任意满足 $\mu(E)>0$ 的集 $E\subset E_0, \dim_{\mathrm{H}}E=s$（可以取 $E_0=\{x:\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(x)=s\}$）。类似地，$\mu$ 具有严格上维数 $s$，当且仅当存在波雷尔集 $E_0$，使 $\mu(\mathbb{R}^n\backslash E_0)=0$，及对任意满足 $\mu(E)>0$ 的集 $E\subset E_0$，$\dim_{\mathrm{p}}E=s$。

**证明** 如果 $\mu$ 具有严格的下维数，由定义，存在波雷尔集 $E_0$，使 $\mu(\mathbb{R}^n\backslash E_0)=0$，且对任意 $x\in E_0$，$\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(x)=s$，于是如果 $E\subset E_0$，且 $\mu(E)>0$，则由式(10.4)和(10.5)知，$\dim_{\mathrm{H}}E=s$。

反之，如果存在波雷尔集 $E_0$，使 $\mu(\mathbb{R}^n\backslash E_0)=0$ 及对任意满足 $\mu(E)>0$ 的集 $E\subset E_0, \dim_{\mathrm{H}}E=s$，则由式(10.10)知，$\dim_{\mathrm{H}}\mu=s$，所以由式(10.8)，对 $\mu$-几乎所有的 $x$，$\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(x)\geqslant s$，另一方面，由式(10.14)，$\dim_{\mathrm{H}}^{*}\mu\leqslant s$，所以由式(10.12)，对 $\mu$-几乎所有的 $x$，$\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(x)\leqslant s$，因此 $\mu$ 具有严格的下维数 $s$。

有关具有严格的上维数的证明可以利用上局部维数和填充维数的相关性质平行地进行。 □

在命题 10.4 分析的例子中，测度 $\mu_p$ 具有严格的上、下局部维数 $s(p)$，用类似的方法，同样可以证明，由式(2.43)－(2.45)定义的满足强分离条件的更一般的自相似测度也是具有严格维数的。

另外一个论证严格维数性的方法是利用遍历性，该方法同样可以应用于自相似测度。回顾 6.1 节的内容，如果对任意的 $\mu$-可测集 $A\subset X, \mu(f^{-1}(A))=\mu(A)$，则称测度 $\mu$ 在 $f: X\to X$ 下是不变的。如果对任意的满足 $f^{-1}(A)=A$ 的可测集 $A$，或者 $\mu(A)=0$，或者 $\mu(X\backslash A)=0$，则称 $\mu$ 是遍历的。

**命题　10.6**

设 $X$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集，如果 $f: X \to X$ 是李卜希兹函数，$\mu$ 是 $X$ 上的有限测度，且 $\mu$ 在 $f$ 下是不变的，又是遍历的。则 $\mu$ 具有严格的下维数和严格的上维数。

**证明**　证明中要用到遍历定理。设 $a$ 是 $f$ 的李卜希兹常数，即对任意 $z, w \in X$, $|f(z)-f(w)| \leqslant a|z-w|$ 。于是，对 $x, y \in X$ 和 $r>0$, $|f(x)-f^{j+1}(y)| \leqslant a|x-f^j(y)|$（这里 $f^j$ 是 $f$ 的第 $j$ 次迭代），所以如果 $f^j(y) \in B(x,r)$，则 $f^{j+1}(y) \in B(f(x),ar)$，用示性函数表示，则是

$$\mathbf{1}_{B(x,r)}(f^j(y)) \leqslant \mathbf{1}_{B(f(x),ar)}(f^{j+1}(y)) \tag{10.22}$$

把遍历定理 6.1 应用到示性函数 $\mathbf{1}_{B(x,r)}$ 和 $\mathbf{1}_{B(f(x),ar)}$ 上（对固定的 $x$ 和 $r$），则由式(6.4) 和(6.5)，对 $\mu$-几乎所有的 $y$，

$$\mu(B(x,r)) = \int \mathbf{1}_{B(x,r)} \mathrm{d}\mu = \mu(x) \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{1}_{B(x,r)}(f^j(y))$$

和

$$\mu(B(f(x),ar)) = \int \mathbf{1}_{B(f(x),ar)} \mathrm{d}\mu = \mu(x) \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{1}_{B(f(x),ar)}(f^j f(y))$$

(在上面第二个式子是把遍历定理应用到 $f(y)$，注意到利用 $\mu$ 的不变性，"几乎所有的 $f(y)$" 相当于"几乎所有的 $y$")，由式(10.22)，对任意的 $x \in X$ 及 $r>0$, $\mu(B(x,r)) \leqslant \mu(B(f(x),ar)$，于是，

$$\begin{aligned}
\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(f(x)) &= \liminf_{r\to 0} \log\mu(B(f(x),r))/\log r \\
&= \liminf_{r\to 0} \log\mu(B(f(x), ar))/\log ar \\
&\leqslant \liminf_{r\to 0} \log\mu(B(x,r))/(\log r + \log a) \\
&= \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(x)
\end{aligned}$$

由于 $\mu$ 在 $f$ 下是不变的，所以

$$\int \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(f(x))\mathrm{d}\mu(x) = \int \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

由此得出结论：对 $\mu$-几乎所有的 $x$, $\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(f(x)) = \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(x)$，即 $\mu$ 有严格的下维数。利用上极限的相应的一序列不等式，可以

同样地证明上维数的严格性。 □

从引理 6.4(b) 中已经看到，由式(2.43)－(2.45) 定义的，满足强分离条件的自相似测度在由 $E_i$ 上的由 $F_i^{-1}$ 定义的映射 $f: E \to E$ 下是不变的和遍历的，所以由命题 10.6 它们都有严格的上、下维数。类似的，许多不变的遍历测度也可以定义在 cookie – cutter 集上，这些测度因而也是具有严格维数的。对严格维数的另一些遍历性的判据，可参见练习 10.6。

许多计算集合维数的方法都涉及到估计集中到这个集合的测度的维数，而找到这样的具有的维数与所考虑的集合的维数相等或接近的测度是一个重要的问题。

在动力系统的情形中，测度的分形性质比集合的分形性质显得更为重要。在计算机实验中，为了显示动力系统 $x \mapsto f(x)$ 的吸引子，希望通过描绘从初始点 $x$ 出发，迭代生成的大量的点 $x, f(x), f^2(x), \cdots, f^k(x)$ 来显示吸引子。本质上，在计算机屏幕上显示出的是，由

$$\mu(A) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \# \{ j \leqslant k : f^j x \in A \}$$

(假定在某种意义下收敛)定义的“驻留测度”$\mu$，它是由系统的吸引子所支撑的。观察到的正是这个测度而不是吸引子本身，它的一些部分，分布的迭代点可能会非常稀疏。寻求吸引子集的维数的方法通常是估计这个测度的而不是集合的维数。当然，涉及动力系统吸引子的维数与其它参数关系的许多结果也与吸引子的测度，而不是与集合本身有关。

## 10.2 测度的维数分解

如果一个测度不具有严格维数，人们自然地要试着将它分解，使在 $s$ 的一个范围内，分解成的测度具有严格的维数。在这一节中，叙述处理这个问题的一个方法。下面只给出对下局部维数和豪斯道夫维数的详细的阐述；而对上局部维数和填充维数也有一

套平行的理论。与前面一样，$\mu$ 仍是 $\mathbb{R}^n$ 上的有限波雷尔规则测度。

对 $s\geqslant 0$，考虑这样的集合，它的（下）局部维数不超过 $s$：

$$\underline{E}_{\leqslant s}=\{x: \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(x)\leqslant s\} \tag{10.23}$$

则 $\underline{E}_{\leqslant s}$ 是波雷尔集，且由命题 2.3(b)

$$\dim_{\mathrm{H}}\underline{E}_{\leqslant s}\leqslant s \tag{10.24}$$

显然，随 $s$ 的增加，$\underline{E}_{\leqslant s}$ 是不降的，因此有上连续性：

$$\underline{E}_{\leqslant s}=\bigcap_{t>s}\underline{E}_{\leqslant t} \tag{10.25}$$

记 $\underline{E}_s$ 为其上的点都具有严格的（下）局部维数 $s$ 的集合，则

$$\underline{E}_s\equiv\{x: \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(x)=s\} \tag{10.26}$$

$$=\underline{E}_{\leqslant s}\setminus\bigcup_{t<s}\underline{E}_{\leqslant t} \tag{10.27}$$

为得到所希望的 $\mu$ 的分解，首先研究 $\mu$ 在集 $\underline{E}_{\leqslant s}$ 上的限制 $\mu_s$，即 $\mu_s=\mu|_{\underline{E}_{\leqslant s}}$，它由下式定义，对任意集 $A$

$$\mu_s(A)=\mu(A\cap\underline{E}_{\leqslant s}) \tag{10.28}$$

显然

$$\mu_s(\mathbb{R}^n\setminus\underline{E}_{\leqslant s})=0$$

并且由式(10.25)及式(1.13)的测度连续性

$$\lim_{t\searrow s}\mu_t(A)=\lim_{t\searrow s}\mu(A\cap\underline{E}_{\leqslant t})=\mu(A\cap\underline{E}_{\leqslant s})=\mu_s(A)。 \tag{10.29}$$

可以利用集合的维数表示 $\mu_s$。

**命题 10.7**

对 $0\leqslant s\leqslant n$ 及任意波雷尔集 $A$

$$\mu_s(A)=\sup\{\mu(A\cap E): E \text{ 是满足 } \dim_{\mathrm{H}}E\leqslant s \text{ 的波雷尔集}\}$$

**证明** 利用式(10.24)

$$\mu_s(A)=\mu(A\cap\underline{E}_{\leqslant s})\leqslant\sup\{\mu(A\cap E): \dim_{\mathrm{H}}E\leqslant s\}$$

另一方面，利用式(10.3)和(10.23)，对 $\mu$ 几乎所有的 $x\notin\underline{E}_{\leqslant t}$，即对 $\mu|_{(\mathbb{R}^n\setminus\underline{E}_{\leqslant t})}$-几乎所有的 $x$，

$$\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu|_{(\mathbb{R}^n\setminus\underline{E}_{\leqslant t})}(x)=\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\mu(x)>t$$

于是，由式(10.8)，$\dim_H \mu|_{(\mathbb{R}^n\setminus \underline{E}_{<t})} \geqslant t$，所以由式(10.10)，如果$E$是满足$\dim_H E<t$的任意波雷尔集，则$0=\mu|_{(\mathbb{R}^n\setminus \underline{E}_{<t})}(E)=\mu(E\setminus \underline{E}_{<t})$。因此，如果$A$是波雷尔集，$\mu(A\cap E)=\mu(A\cap E\cap \underline{E}_{<t})\leqslant \mu_t(A)$，所以

$$\sup\{\mu(A\cap E): \dim_H E<t\}\leqslant \mu_t(A)$$

于是，对任意 $t>s$

$$\sup\{\mu(A\cap E): \dim_H E\leqslant s\}\leqslant \mu_t(A)$$

再利用式(10.29)即完成了命题的证明。 □

在命题 10.7 中取 $s=n$，则对任意的波雷尔集 $A$，

$$\mu_n(A)=\mu(A) \tag{10.30}$$

下面在实区间$[0,n]$上定义有限波雷尔测度 $\hat{\mu}$，令

$$\hat{\mu}([0,s])=\mu_s(\mathbb{R}^n) \tag{10.31}$$

并按通常的方法把这个定义延拓到$[0,n]$的子集上。由式(10.28)，

$$\hat{\mu}([0,s])=\mu(\underline{E}_{\leqslant s}) \tag{10.32}$$

因为 $\hat{\mu}(B)$ 记录了在实数集 $B$ 中具有(下)局部维数的点集的 $\mu$ 测度，所以 $\hat{\mu}$ 有时称为 $\mu$ 的维数测度。

下面的"维数分解公式"表示 $\mu_s$ 可作为某个测度 $\nu_t$ 关于 $\hat{\mu}$ 的积分；测度 $\nu_t$ 称为 $\mu$ 的维数导数族。

**命题 10.8**

对 $\mathbb{R}^n$ 的每个波雷尔子集 $A$ 和任意 $0\leqslant t\leqslant n$，存在实数 $\nu_t(A)$，使 $0\leqslant \nu_t(A)\leqslant 1$，且

(a) 对 $0\leqslant t\leqslant n$，$\nu_t$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的波雷尔概率测度。

(b) 对任意 $0\leqslant s\leqslant n$，及任意的波雷尔集 $A$，

$$\mu_s(A)=\int_{[0,s]}\nu_t(A)\mathrm{d}\hat{\mu}(t) \tag{10.33}$$

**证明** 对每个波雷尔集 $A$，类似式(10.31)，可以定义$[0,n]$上的波雷尔测度 $\hat{\mu}_A$ 为：  $\hat{\mu}_A([0,s])=\mu_s(A)=\mu(A\cap \underline{E}_{\leqslant s})$，

并把它延拓到$[0,n]$的子集上。对$0\leqslant s<t$,

$$\begin{aligned}0&\leqslant\hat{\mu}_A(s,t]=\mu_t(A)-\mu_s(A)\\&=\mu(A\cap(\underline{E}_{\leqslant t}\backslash\underline{E}_{\leqslant s}))\leqslant\mu(\underline{E}_{\leqslant t}\backslash\underline{E}_{\leqslant s})\\&=\mu_t(\mathbb{R}^n)-\mu_s(\mathbb{R}^n)=\hat{\mu}(s,t]\end{aligned}$$

所以，对任意$B\subset[0,n]$,

$$0\leqslant\hat{\mu}_A(B)\leqslant\hat{\mu}(B)\tag{10.34}$$

即$\hat{\mu}_A$是对$\hat{\mu}$绝对连续的，所以可以把$\hat{\mu}_A$表成

$$\hat{\mu}_A(B)=\int_B v_t(A)\mathrm{d}\hat{\mu}(t)$$

其中$v_t(A)$是Radon－Nikodym导数，即$v_t(A)=\mathrm{d}\hat{\mu}_A(t)/\mathrm{d}\hat{\mu}$。特别取$B=[0,s]$,并利用$\hat{\mu}_A([0,s])=\mu_s(A)$,即知对$0\leqslant s\leqslant n$，式(10.33)成立。

证明$v_t$是$\mathbb{R}^n$上的测度存在技术上的困难，这是因为$\mathrm{d}\hat{\mu}_A(t)/\mathrm{d}\hat{\mu}$只定义在$\hat{\mu}$-几乎处处的$t$上。但可以将这个定义复制如下，令

$$\mathcal{A}=\{[k_12^{-m},(k_1+1)2^{-m})\times\cdots\times[k_n2^{-m},(k_n+1)2^{-m}):\\ m\in\mathbb{Z}^+,k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{Z}\}$$

为$\mathbb{R}^n$上的二进立方体的集合，对任意$A\in\mathcal{A}$,选定一个Radom－Nikodym导数的表达式$v_t(A)=\mathrm{d}\hat{\mu}_A(t)/\mathrm{d}\hat{\mu}$；根据式(10.34)，对任意$A\in\mathcal{A}$及$t\in[0,n]$，可以假定$0\leqslant v_t(A)\leqslant1$。如果$A_1,\cdots A_k$是相互不交的集合，且$A=\bigcup_{i=1}^k A_i$,则对$\hat{\mu}$几乎所有的$t$,

$$\mathrm{d}\hat{\mu}_A(t)/\mathrm{d}\hat{\mu}=\mathrm{d}\hat{\mu}_{A_1}(t)/\mathrm{d}\hat{\mu}+\cdots+\mathrm{d}\hat{\mu}_{A_k}(t)/\mathrm{d}\hat{\mu}\tag{10.35}$$

或者

$$v_t(A)=v_t(A_1)+\cdots+v_t(A_k)\tag{10.36}$$

因为$\mathcal{A}$包含可数多个二进立方体，而每个立方体又是$2^n$个边长为其一半的小二进立方体的不交并，所以存在集合$W\subset[0,n]$，满足$\hat{\mu}([0,n]\backslash W)=0$，只要$A$是二进立方体，且$A_1,\cdots A_k$是$2^n$个边长为$A$边长一半的二进子立方体，则对任意$t\in W$，式(10.36)成立。于是，对任意$t\in W$，可以用一种相容的加法方式，将$v_t(A)$延拓到$A$是二进立方体的有限并的集类中去，并使式(10.33)对这些集合

仍然成立。可用通常的方式继续这个延拓的过程，使得对任意 $t\in W$，测度 $\nu_t$ 在波雷尔集类上是可数可加的，并满足 $0\leqslant\nu_t(\mathbb{R}^n)\leqslant 1$，且把式(10.33)延拓到波雷尔集类上。因为 $\hat{\mu}([0,n])=\mu(\mathbb{R}^n)$，由式(10.30)，又有 $\mu(\mathbb{R}^n)=\mu_n(\mathbb{R}^n)=\int_{[0,n]}\nu_t(\mathbb{R}^n)\mathrm{d}\hat{\mu}(t)$，所以，对 $\hat{\mu}$-几乎所有的 $t$，$\nu_t(\mathbb{R}^n)=1$。于是，对 $\hat{\mu}$-几乎所有的 $t\in[0,n]$，测度 $\nu_t$ 是概率测度。通过再把 $\nu_t$ 定义在 $\hat{\mu}$ 测度为零的 $t$ 的集合上，可得到对任意 $t\in[0,n]$，$\nu_t$ 是满足式(10.33)的概率测度。 □

下一个命题概括了测度 $\nu_t$ 的主要性质。

**命题 10.9**

设 $\nu_t$ 满足命题 10.8 的结论，则

(a) 对任意的波雷尔集 $A$，及 $\hat{\mu}$-几乎所有的 $t\in(\dim_H A, n]$，$\nu_t(A)=0$。

(b) 对任意 $s$ 及 $\hat{\mu}$-几乎所有的 $t\in[0,s]$，$\nu_t(\underline{E}_{\leqslant s})=1$。

(c) 对 $\hat{\mu}$-几乎所有的 $t$，$\nu_t(\underline{E}_t)=1$ 且 $\nu_t(\mathbb{R}^n\setminus\underline{E}_t)=0$。

**证明** (a) 设 $A$ 是波雷尔集，并记 $s=\dim_H A$，由式(10.33)

$$\int_{(s,n]}\nu_t(A)\mathrm{d}\hat{\mu}(t)=\mu_n(A)-\mu_s(A)$$

$$\leqslant\mu(A)-\mu(A\cap A)=0$$

利用式(10.30)及命题 10.7，则知对 $\hat{\mu}$-几乎所有的 $t\in(s,n]$，$\nu_t(A)=0$。

(b) 由式(10.33)，(10.28)及(10.31)

$$\int_{[0,s]}\nu_t(\underline{E}_{\leqslant s})\mathrm{d}\hat{\mu}(t)=\mu_s(\underline{E}_{\leqslant s})=\mu_s(\mathbb{R}^n)=\hat{\mu}([0,s])=\int_{[0,s]}1\mathrm{d}\hat{\mu}(t)$$

因为对所有 $t$，$0\leqslant\nu_t(\underline{E}_{\leqslant s})\leqslant 1$，这意味着对 $\hat{\mu}$-几乎所有的 $t\in[0,s]$，$\nu_t(\underline{E}_{\leqslant s})=1$。

(c) 注意到

$$\{t\in[0,n]: \text{对有理数 } q>t,\ \nu_t(\underline{E}_{\leqslant q})<1\}=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{t:\ \nu_t(\underline{E}_{\leqslant q})<1,\ t<q\} \tag{10.37}$$

由(b)知上式并中的集合的 $\hat{\mu}$ 测度都为 0, 即对 $\hat{\mu}$ 几乎所有的 $t$, $\nu_t(\underline{E}_{\leqslant q})=1$ 对所有的有理数 $q>t$ 成立。根据式(10,25), 则知对 $\hat{\mu}$ 几乎所有的 $t$,

$$\nu_t(\underline{E}_{\leqslant t})=\lim_{q\searrow t}\nu_t(\underline{E}_{\leqslant q})=1 \tag{10.38}$$

用同样的方法:

$$\{t\in[0,n]: \text{对有理数 } q<t,\nu_t(\underline{E}_{\leqslant q})>0\}=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{t:\ \nu_t(\underline{E}_{\leqslant q})>0,\ t>q\}$$

因为由式(10.24)知 $\dim_{\mathrm{H}}\underline{E}_{\leqslant q}\leqslant q$, 所以从(a)知上式的并的 $\hat{\mu}$ 测度为 0。于是对 $\hat{\mu}$ 几乎所有的 $t$, $\nu_t(\underline{E}_{\leqslant q})=0$ 对所有有理数 $q<t$ 成立, 所以利用式(10.27)及(10.38),

$\nu_t(\underline{E}_t)=\nu_t(\underline{E}_{\leqslant t})-\lim_{q\nearrow t}\nu_t(\underline{E}_{\leqslant q})=1-0=1$ 。

最后, 注意到

$\nu_t(\mathbb{R}^n\setminus\underline{E}_t)=\nu_t(\mathbb{R}^n)-\nu_t(\underline{E}_t)=1-1=0$ 。 □

命题 10.9(c) 说明式(10.33)是测度 $\mu$ 的一个分解, 它分解成分别支撑在 $E_t$ 上的部分 $\nu_t$, 而在 $E_t$ 上 $\mu$ 具有局部维数 $t$ 。当然, 最理想的是 $\nu_t$ 本身对 $\hat{\mu}$ 几乎所有的 $t$, 具有严格的维数 $t$ 。然而, 因为 $\nu_t(\underline{E}_{\leqslant t})=1$, 式(10.10)意味着 $\dim_{\mathrm{H}}\nu_t\leqslant\dim_{\mathrm{H}}\underline{E}_{\leqslant t}$ 。是否 $\dim_{\mathrm{H}}\underline{E}_{\leqslant t}$ 会严格地小于 $t$, 如果可能发生, 那么 $\dim_{\mathrm{H}}\nu_t<t$ 。则由式(10.8)知, 对一个具有正 $\nu_t$ 测度的 $x$ 的集, $\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}\nu_t(x)<t$。令人感兴趣的是, 找到对某些 $t$ 保证 $\nu_t$ 具有严格维数的明确条件。下面将要看到, 至少在 $\mu(\underline{E}_t)>0$ 的条件下, 这种情形才发生。

下面, 将利用 $[0,n]$ 上测度 $\hat{\mu}$ 的性质, 得到一种把 $\mu$ 分解成为具有不同局部维数部分的可选择的方法。回顾一下, 称数 $s$ 是 $\hat{\mu}$

的原子，如果 $\hat{\mu}(\{s\})>0$。由点测度的求和知道，有限测度 $\hat{\mu}$ 的原子的集合 $S$ 显然最多是可数集。$\hat{\mu}$ 在 $S$ 上的限制称为 $\hat{\mu}$ 的原子部分，而 $\hat{\mu}$ 在 $[0, n]\backslash S$ 上的限制则称为 $\hat{\mu}$ 的非原子部分。

下面将要见到，有限测度 $\mu$ 的具有严格维数的分解部分对应于 $\hat{\mu}$ 的原子 $S$。另一方面，相应于 $\hat{\mu}$ 的非原子部分的分解 $\mu^{D}$ 具有扩散维数分布，即对任意 $s$, $\mu^{D}\{x: \underline{\dim}_{loc}\mu^{D}(x)=s\}=0$ 。

由式(10.27)和(10.33)，对波雷尔集 $A$

$$\begin{aligned}\mu(A\cap\underline{E}_s)&=\mu(A\cap\underline{E}_{\leqslant s})-\lim_{r\nearrow s}\mu(A\cap\underline{E}_{\leqslant r})\\&=\mu_s(A)-\lim_{r\nearrow s}\mu_r(A)\\&=\lim_{r\nearrow s}\int_{(r,s]}\nu_t(A)\mathrm{d}\hat{\mu}(t)\end{aligned}$$

取 $A=\mathbb{R}^n$，则知，只要 $s$ 不是 $\hat{\mu}$ 的原子，即有 $\mu(\underline{E}_s)=0$。而当 $s$ 是原子的情形，则

$$\mu(A\cap\underline{E}_s)=\nu_s(A)\hat{\mu}(\{s\})\tag{10.39}$$

于是 $\hat{\mu}$ 的原子对应于那些使 $\mu(\underline{E}_s)>0$ 的 $s$; 这就使我们可以限制 $\mu$ 到这样 $s$ 的$\underline{E}_s$ 上，而把 $\mu$ 分解成具有严格维数的部分。

**命题 10.10**

设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有限波雷尔测度，则存在有限或可数集 $S\subset[0,n]$，及对任意 $s\in S$ 均具有严格维数 $s$ 的测度 $\mu^s$，和具有扩散维数分布的测度 $\mu^D$，使得

$$\mu=\sum_{s\in S}\mu^s+\mu^D\tag{10.40}$$

事实上，可取

$$S=\{s\in[0,n]: \mu(\underline{E}_s)>0\}\tag{10.41}$$

和对 $A\subset\mathbb{R}^n$

$$\mu^s(A)=\mu(A\cap\underline{E}_s)\tag{10.42}$$

$$\mu^D(A)=\mu(A\backslash\bigcup_{s\in S}\underline{E}_s)\tag{10.43}$$

其中(与前面一样)

$$\underline{E}_s=\{x:\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x)=s\} \tag{10.44}$$

证明 因为$\mu(\mathbb{R}^n)<\infty$，所以式(10.41)中的$S$集是可数的。对$s\in S$，用式(10.42)定义波雷尔测度$\mu^s$和用式(10.43)定义$\mu^D$。由式(10.3)和式(10.44)知，对$\mu$-几乎所有的$x\in\underline{E}_s$，等式$\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu^s(x)=\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x)=s$成立。于是，对$\mu^s$-几乎所有的$x$，$\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu^s(x)=s$，所以$\mu^s$具有严格维数$s$。

利用式(10.42)和(10.43)，对$A\subset\mathbb{R}^n$，

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\sum_{s\in S}\mu(A\cap\underline{E}_s)+\mu\left(A\setminus\bigcup_{s\in S}\underline{E}_s\right)\\&=\sum_{s\in S}\mu^S(A)+\mu^D(A)\end{aligned}$$

为证明$\mu^D$具有扩散的维数分布，再一次用到式(10.3)，注意到对$\mu^D$-几乎所有的$x$，$\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu^D(x)=\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x)$，于是对任意$t\in[0,n]$

$$\mu^D(\{x:\underline{\dim}_{\text{loc}}\mu^D(x)=t\})=\mu^D(\underline{E}_t)=\mu\left(\underline{E}_t\setminus\bigcup_{s\in S}\underline{E}_s\right)=0$$

这是因为如果$\mu(\underline{E}_t)>0$，则$t$是$\hat{\mu}$的原子，必存在$s\in S$，使$\underline{E}_t=\underline{E}_s$。所以$\mu^D$具有扩散维数分布。 □

具有严格维数的测度较容易找到；命题10.4和10.6给出了许多例子。然而，具有扩散维数分布的测度自然较少出现。下面说明如何构造这样的测度；事实上，将证明存在$\mathbb{R}$上的测度$\mu$，使得维数测度$\hat{\mu}$等于任意给定的[0,1]上的一个概率测度。本质上就是把具有由命题10.4导出的形式的测度聚集起来，而得出具有希望的维数测度的测度。

引理 10.11

对任意$0\leqslant s\leqslant 1$，存在波雷尔概率测度$v_s$和集$F'_s$，使得$F'_s$对$s$是不降的，及$\dim_H F'_s=\dim_H v_s=s$，并且 $v_s(F'_s)=1$。

**证明** 这些集和测度本质上是在命题 10.4 中构造的。注意到对 $0\leqslant s\leqslant 1$，可以找到唯一的 $p=p(s)$，使 $0\leqslant p\leqslant \frac{1}{2}$，且 $s=-(p\log p+(1-p)\log(1-p))/\log 2$。令 $F_s'=F_{p(s)}$，$\nu_s=\mu_{p(s)}$ 这里 $F_{p(s)}$ 与 $\mu_{p(s)}$ 如命题 10.4 中所叙述的，这就得到了所要求的性质的集和测度。 □

**命题 10.12**

设 $\eta$ 是[0,1] 上的概率测度，则存在 $\mathbb{R}$ 上的波雷尔测度 $\mu$ 使 $\hat{\mu}=\eta$。

**证明** 设 $\nu_t$ 和 $F_s'$ 如引理 10.11 所叙述的，定义波雷尔测度如下：

$$\mu(A)=\int_{[0,1]}\nu_t(A)\mathrm{d}\eta(t) \tag{10.45}$$

因为对任意 $t\in[0,1]$，$\nu_t(\mathbb{R})=1$，所以 $\mu(\mathbb{R})=1$。又因为 $\dim_{\mathrm{H}}\nu_t=t$，则由式(10.10)，对任意满足 $\dim_{\mathrm{H}}E<t$ 的波雷尔集 $E$，$\nu_t(E)=0$。于是，对 $0\leqslant s\leqslant 1$，利用式(10.31)，命题 10.7，式(10.45) 和命题 10.9(a)，

$$\begin{aligned}\hat{\mu}([0,s])&=\mu_s(\mathbb{R})\\&=\sup\left\{\int_{[0,1]}\nu_t(E)\mathrm{d}\eta(t):\dim_{\mathrm{H}}E\leqslant s\right\}\\&=\sup\left\{\int_{[0,s]}\nu_t(E)\mathrm{d}\eta(t):\dim_{\mathrm{H}}E\leqslant s\right\}\\&=\eta([0,s])\end{aligned}$$

上面还用到条件，对任意 $E$，$\nu_t(E)\leqslant 1$ 且对 $t\leqslant s$ $\nu_t(F_s')=1$，$\dim_{\mathrm{H}}F_s'=s$。所以 $\hat{\mu}=\eta$ □

这个结论可以推广，一般地可以得到 $\mathbb{R}^n$ 上的测度 $\mu$，使得对任意给定的$[0,n]$ 上的概率测度 $\eta$，$\hat{\mu}=\eta$。

## 10.3 注记与参考文献

几乎是自几何测度论诞生以来，测度的局部维数就以某种形式出现，虽然不是称为这个名字。特别是 Frostman (1935) 和 Billingsley (1965) 利用测度的局部维数去研究集合的维数。Tricot (1982), Cutler (1986), Haase (1992) 及 Hu 和 Taylor (1994) 讨论了豪斯道夫和填充测度与局部维数的关系。严格维数性的遍历判据由 Cutler(1990) 和 Fan(1995) 给出。

Rogers 和 Taylor(1959 ,1962) 得到与命题 10.10 非常相似的分解定理，并且构造了有扩散维数分布的测度。在 10.2 节中应用的方法是由 Cutler(1986,1992), Kahane 和 Katznelson (1990) 应用 Riesz 位势得到的类似的分解方法。

### 练习

10.1 设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有限测度，而 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是李卜希兹映射。证明 $\underline{\dim}_{\text{loc}}\nu(f(x)) \leqslant \underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立，其中 $\nu$ 由 $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ 定义。证明如果 $f$ 是相似或仿射变换，则对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\dim}_{\text{loc}}\nu(f(x)) = \underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x)$。

10.2 利用命题 1.7 的密度性质，验证式(10.3)。

10.3 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有限波雷尔测度，$c \in \mathbb{R}$，验证 $\{x: \underline{\dim}_{\text{loc}}\mu(x) < c\}$ 是波雷尔集。

10.4 证明命题 10.3。

10.5 设 $0 < p < 1$, $E$ 是三分康托集，$\mu$ 是在通常的康托集构造上，按 $p:1-p$ 的比例把测度重复地分配到下一步的子区间上，而得到的以 $E$ 为支撑的自相似测度。证明 $\mu$ 具有的严格下维数等于 $-(p\log p + (1-p)\log(1-p))/\log 3$。

10.6 (另一个严格性的判据) 设 $X$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集，而 $\mu$ 是 $f: X \to X$ 下的遍历的不变测度。设对任意的波雷尔集 $E$，

$\dim_H f^{-1}(E) \leqslant \dim_H E$。证明$\mu$具有严格下维数。(提示：如果$\mu(E)>0$，利用遍历性的定义证明$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-j}E)=1$，然后利用式(10.10)和(10.14)证明。)

10.7 设$\mu_1$和$\mu_2$是具有不相交支撑的$\mathbb{R}^n$上的有限测度，证明维数测度满足$(\mu_1+\mu_2)\hat{} = \hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2$。

10.8 直接证明(在具有$\hat{\mu}$测度的$t$集内)由式(10.45)定义的测度$\mu$具有维数导数族$\nu_t$。

10.9 $\underline{E}_{\leqslant s}$如式(10.23)所示，证明$\dim_H^* \underline{E}_{\leqslant s} \leqslant s$。

# 第11章 部分多重分形分析

正如在上一章见到的,密度变化范围较大的单个测度可以定义出分形集的全部的“谱”,而这种谱是由在分形集上,局部维数取特殊值的那些点所决定的。上一章主要是涉及这些集的$\mu$测度,在这一章中,通过考察一类集合,进行“更细致”的分析,而这类集合虽然$\mu$测度值是零,但作为具有正维数的集合还是有重要意义的。多重分形分析目的在于量化测度的奇异结构,以及在尺度发生变化时,为伴随有不同范围的幂定律的现象提供模型。

回顾一下,对$\mathbb{R}^n$上的有限测度$\mu$, $\mu$在$x$点的局部维数(或局部 Hölder 指数)由下式定义:

$$\dim_{\text{loc}}\mu(x)=\lim_{r\to 0}\log\mu(B(x,r))/\log r \tag{11.1}$$

如果这个极限存在的话。对任意$\alpha\geqslant 0$,考虑这样的一个$x$的点集$E_\alpha$,在$E_\alpha$上局部维数存在且等于$\alpha$。(在多重分形分析中,有关这个问题普遍地用“$\alpha$”而不用“$s$”,在本章中也遵循这个约定)。对某些测度$\mu$,集合$E_\alpha$可能是非空的,且在$\alpha$的一个范围内有相应的分形。当这种情形发生时,$\mu$通常称为多重分形测度。很自然地要对由$f(\alpha)\equiv\dim E_\alpha$(某些适当定义的维数)定义的$\mu$的多重分形谱或奇异谱进行研究。例如,自相似测度(见2.2节)是普通的多重分形测度,它们的谱将在11.2节详细分析。

这种通过一个测度来获得许多分形的思想乍看来是相当吸引人的,但是在分析数学性质和试图计算在一些特殊情形下的多重分形谱时,就有重重的技术上的困难。例如,何时利用上或者下局部维数更合理,或者在定义$f(\alpha)$时应该利用维数的哪一个定义,这些问题都不总是很清楚。在$r\to 0$的过程中,当$r$的值较小,但处有于限的尺度时,对有关$\mu(B(x,r))$的极限状况的处理要十分

仔细，这里可能会引出精细的或者是粗线条的两种多重分形理论。当 $q$ 是负数且 $\mu(A)$ 较小时，涉及 $\mu(A)^q$ 的估计也会出现一些困难。

尽管如此，或者可能正因为如此，对多重分形的数学研究已经做了大量的工作，早期的这方面的工作是对分形集做的。其目的是给出多重分形维数谱的令人满意的定义和解释，并研究相应的几何特性(例如有关测度的分形谱及它在子空间上的射影)，和寻找计算多重分形谱的一般方法，进而求出一些特殊测度的谱。

在本章中所做的并不会超出涉及多重分形的数学性质这方面的事。11.1 节介绍了有关能适用于普通测度的一般理论，并特别讨论了对多重分形的精细的和粗线条的两种处理方法。11.2 节计算了自相似测度的分形谱，而 11.3 节则利用热力学形式体系把上一节的计算方法推广到非线性的情形，即 cookie－cutter 集上的 Gibbs 测度的情形。

在许多情况中都可以见到具有多重分形特性的测度。多重分形已被利用来描述动力系统的吸引子上的驻留测度，流体中的湍流，雨量分布，宇宙中的质量分布，粘性指进，神经网络和许多其它现象。然而，要将这些例子与数学及计算理论联系起来总不是那么容易的。

## 11.1　精细的与粗线条的多重分形理论

多重分形分析有两种基本的处理方法：即考察 $E_\alpha$ 集本身的几何性质的精细理论，及考虑当 $r$ 较小但取正值时的 $\mu(B(x,r))$ 分布的不规则性的粗线条理论。在精细理论中，研究当 $r\to 0$ 时 $\mu(B(x,r))$ 的局部极限状况，并考察随这种不同状况定义的集的整体性质。而在粗线条理论中，描述 $r$ 较小时，$\mu(B(x,r))$ 整体的不规则性，并对 $r\to 0$ 时考察这个极限。在多重分形分析的精细的和粗线条的两种处理方法之间有许多相似之处，例如，它们都涉

及到勒让德变换，两种处理方法对许多基本测度都导出相同的多重分形谱 。

精细理论可能更适合于数学上的分析，并需要与研究集合的豪斯道夫维数时用到的相近的思想 。另一方面，粗线条理论却更适合于寻找物理学例子中的多重分形谱，或估计来自于计算机实验问题中的谱，而它的处理方法使人更多地回想起盒维数的计算 。

在讨论精细的和粗线条的处理方法，以及它们与一般测度的联系中，必须强调它们的定义和适用范围会有许多变化，这种类似的，但却是不同的定义可能会在书中的其它地方见到 。

设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有限波雷尔规则测度，对 $\alpha\geqslant 0$, 定义

$$E_\alpha=\{x\in\mathbb{R}^n:\dim_{\text{loc}}\mu(x)=\alpha\} \tag{11.2}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}^n:\lim_{r\to 0}\log\mu(B(x,r))/\log r=\alpha\} \tag{11.3}$$

即$E_\alpha$是在其上存在局部维数，且局部维数等于$\alpha$的点的集合，多重分形分析的精细处理方法的主要目的是对$\alpha\geqslant 0$, 求出 $\dim_H E_\alpha$(注意多重分形理论的一些变化，有些是用上或下局部维数定义，或者在下一章中，用“$\geqslant\alpha$”或“$\alpha\leqslant$”来代替“$=\alpha$”) 。

在令人感兴趣的大部分例子中，对那些使 $E_\alpha$ 不平凡的 $\alpha$ 值 。$E_\alpha$ 在 $\text{spt}\mu$ 中稠，则$\underline{\dim}_B E_\alpha=\underline{\dim}_B \overline{E}_\alpha=\underline{\dim}_B\text{spt}\mu$( 对上盒维数有类似的等式）。所以盒维数在区分 $E_\alpha$ 的大小上几乎没有什么作用，于是，更自然地要考虑 。

$$f_H(\alpha)=\dim_H E_\alpha \quad 及 \quad f_P(\alpha)=\dim_P E_\alpha \tag{11.4}$$

它们分别称为 $\mu$ 的豪斯道夫和填充( 精细 ) 多重分形谱 。

显然，对任意 $\alpha\geqslant 0$, $0\leqslant f_H(\alpha)\leqslant\dim_H\text{spt}\mu$，对填充维数，也有类似的不等式。由命题 2.3(b), 对任意 $\alpha$,

$$0\leqslant f_H(\alpha)\leqslant\alpha \text{ 。} \tag{11.5}$$

对粗线条谱的定义是沿着盒维数的线路，考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的 $r$ 网立

方体，它是由$[m_1r,(m_1+1)r]\times\cdots\times[m_nr,(m_n+1)r]$组成的立方体，其中$m_1,\cdots,m_n$是整数。对$\mathbb{R}^n$上的有限测度$\mu$及$\alpha\geqslant 0$，记

$$N_r(\alpha)=\#\{\text{使}\ \mu(A)\geqslant r^{\alpha}\ \text{的}\ r\ \text{网立方体}\ A\} \tag{11.6}$$

定义$\mu$的粗线条多重分形谱为：

$$f_C(\alpha)\equiv\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{r\to 0}\frac{\log^+(N_r(\alpha+\varepsilon)-N_r(\alpha-\varepsilon))}{-\log r} \tag{11.7}$$

如果上式的累次极限存在的话。(其中$\log^+x\equiv\max\{0,\log x\}$，这只是保证$f_C(\alpha)\geqslant 0$的一个方法)，定义式(11.7)意味着，如果$\eta>0$，$\varepsilon>0$且充分小，则对充分小的$r$

$$r^{-f_C(\alpha)+\eta}\leqslant N_r(\alpha+\varepsilon)-N_r(\alpha-\varepsilon)\leqslant r^{-f_C(\alpha)-\eta}\ . \tag{11.8}$$

粗略地讲，$-f_C(\alpha)$是使$r$网立方体$A$满足$\mu(A)\simeq r^{\alpha}$的幂定律中指数的数值。注意到当$r\to 0$时，$f_C(\alpha)$不是使$\mu(A_r(x))\simeq r^{\alpha}$的$x$点集合的盒维数，其中$A_r(x)$是包含$x$的$r$网立方体；粗线条谱提供了在$r$尺度变化时，对测度$\mu$的变动的一个总体的观察，但并没有给出$\mu$在任何一点上的极限状况的信息 。

在式(11.7)的极限不存在的情形，对$\alpha\geqslant 0$，定义$\mu$的下、上粗线条多重分形谱为：

$$\underline{f}_C(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{r\to 0}\frac{\log^+(N_r(\alpha+\varepsilon)-N_r(\alpha-\varepsilon))}{-\log r} \tag{11.9}$$

及

$$\overline{f}_C(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{r\to 0}\frac{\log^+(N_r(\alpha+\varepsilon)-N_r(\alpha-\varepsilon))}{-\log r} \tag{11.10}$$

下面的引理给出了精细谱与粗线条谱之间的基本关系：

**引理 11.1**

设$\mu$是$\mathbb{R}^n$上的有限测度，则对任意$\alpha\geqslant 0$，

$$f_H(\alpha)\leqslant\underline{f}_C(\alpha)\leqslant\overline{f}_C(\alpha) \tag{11.11}$$

**证明** 只要证明式(11.11)中的左边的不等号，右边的不等号是显

然的。为简单起见，设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}$ 上的测度，高维空间中的证明也是类似的，只不过在高维空间中用来比较的球和立方体的测度，在一维空间中用区间的测度取代。

对固定的 $\alpha \geqslant 0$，简记 $f \equiv f_H(\alpha) = \dim_H E_\alpha$，可以假设 $f > 0$，则对给定的 $0 < \varepsilon < f$，$\mathcal{H}^{f-\varepsilon}(E_\alpha) = \infty$。由式(11.3)，存在集 $E_\alpha^0 \subset E_\alpha$ 使 $\mathcal{H}^{f-\varepsilon}(E_\alpha^0) > 1$，且存在 $r_0 > 0$ 使任意 $x \in E_\alpha^0$ 及任意 $0 < r \leqslant r_0$，

$$3r^{\alpha+\varepsilon} \leqslant \mu(B(x,r)) < 2^{\varepsilon-\alpha} r^{\alpha-\varepsilon} \tag{11.12}$$

可以选择满足 $0 < \delta \leqslant \frac{1}{2} r_0$ 的 $\delta$，使 $\mathcal{H}_\delta^{f-\varepsilon}(E_\alpha^0) \geqslant 1$。

对任意 $r \leqslant \delta$，考虑与 $E_\alpha^0$ 相交的 $r$ 网区间(具有$[(mr,(m+1)r]$形式，且 $m \in \mathbb{Z}$)，这样的区间 $A$ 包含 $E_\alpha^0$ 的点 $x$，满足

$$B(x,r) \subset A \cup A_L \cup A_R \subset B(x,2r)$$

其中 $A_L$ 和 $A_R$ 分别是紧连着 $A$ 的两旁的 $r$ 网区间。由式(11.12)

$$3r^{\alpha+\varepsilon} \leqslant \mu(B(x,r)) \leqslant \mu(A \cup A_L \cup A_R) \leqslant \mu(B(x,2r)) < r^{\alpha-\varepsilon}$$

所以

$$r^{\alpha+\varepsilon} \leqslant \mu(A_0) < r^{\alpha-\varepsilon} \tag{11.13}$$

其中 $A_0$ 是 $A$、$A_L$ 及 $A_R$ 中的一个。由 $\mathcal{H}_\delta^{f-\varepsilon}$ 的定义，至少有 $r^{\varepsilon-f}\mathcal{H}_\delta^{f-\varepsilon}(E_\alpha^0) \geqslant r^{\varepsilon-f}$ 个与 $E_\alpha^0$ 相交的$r$-网区间，所以至少有 $\frac{1}{3} r^{\varepsilon-f}$ 个满足式(11.13)的$r$-网区间 $A_0$(注意到每两个区间 $A$ 被 $2r$ 或更多的 $r$ 分开，得出了不同的 $A_0$ 区间)。因此，对 $r \leqslant \delta$

$$N_r(\alpha+\varepsilon) - N_r(\alpha-\varepsilon) \geqslant \frac{1}{3} r^{\varepsilon-f}$$

所以由式(11.9)，即得 $\underline{f}_C(\alpha) \geqslant f = f_H(\alpha)$。 □

事实上，正如已见到的许多集有相同的盒维数和豪斯道夫维数一样，许多普通的测度也有相同的粗线条谱与精细谱，下一节中将见到的自相似测度正是如此。

多重分形谱通过勒让德变换与某些矩联系起来，这就提供了另一种计算分形谱的方法。确实，许多测度具有的分形谱实际上等于自然的辅助函数的勒让德变换。

设 $\beta$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是凸函数，则存在 $\alpha$ 的某个范围，比如说是 $\alpha\in[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$，在这个范围内，$\beta$ 的图有一斜率为 $-\alpha$ 的支撑线 $L_\alpha$，且对这样的 $\alpha$，这种支撑线是唯一的。(当 $\alpha=\alpha_{\min}$ 或 $\alpha_{\max}$，取 $L_\alpha$ 为相应图的渐近线)。$\beta$ 的勒让德变换是函数 $f:[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]\to\mathbb{R}$，函数值由 $L_\alpha$ 与铅垂坐标轴的截点的值给出。见图 11.1

$$f(\alpha)=\inf_{-\infty<q<\infty}\{\beta(q)+\alpha q\} \tag{11.14}$$

且 $f$ 对 $\alpha$ 是连续的。

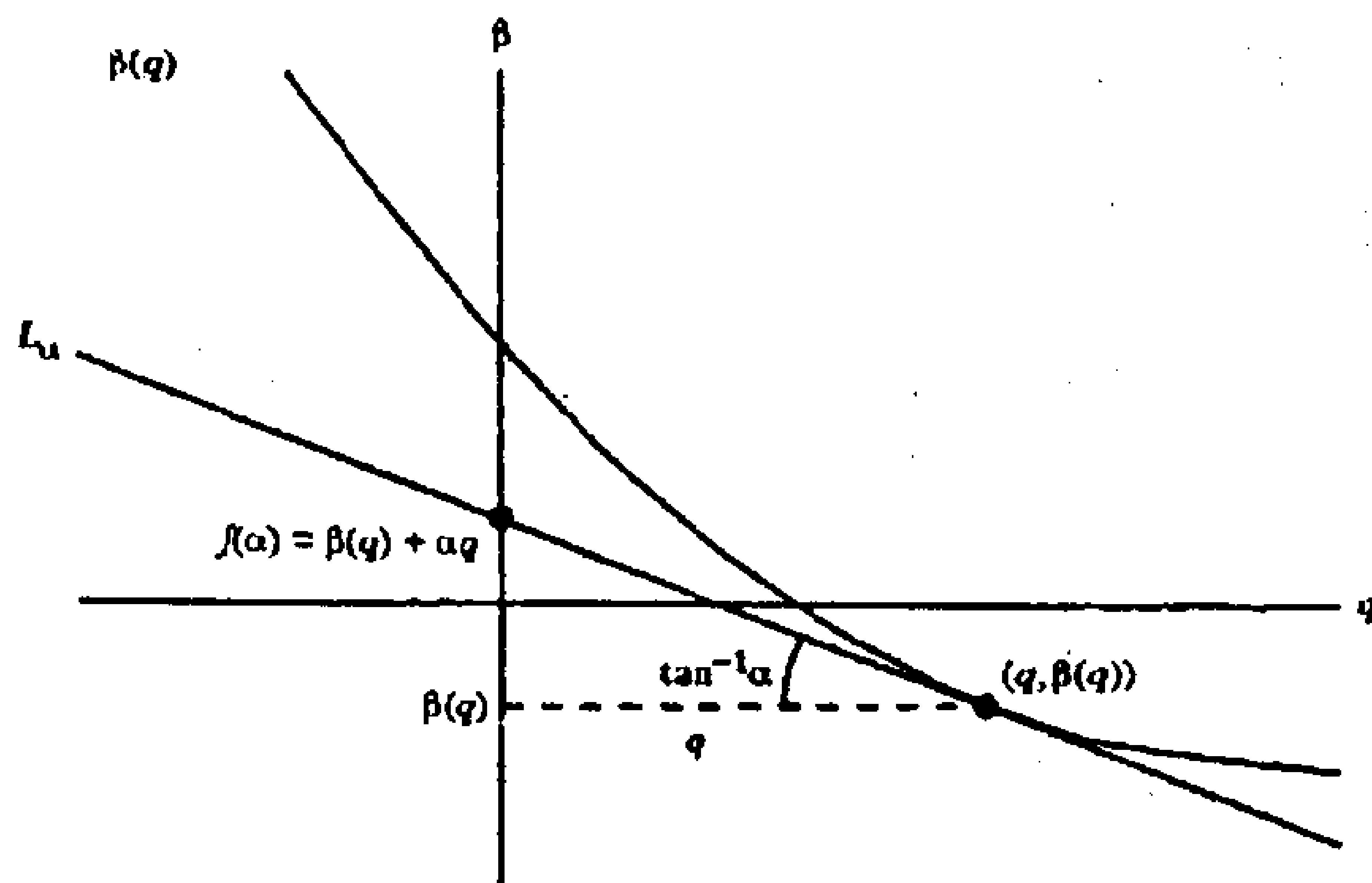



图 11.1 $\beta(q)$ 的勒让德变换是 $f(\alpha)$，等于斜率为 $-\alpha$ 的切线与 $\beta$ 轴的截点值

粗线条谱关系到矩和的幂定律指数的勒让德变换，对 $q\in\mathbb{R}$ 及 $r>0$，考虑测度 $\mu$ 的 $q$ 次幂的矩和式

$$M_r(q)=\sum\mu(A)^q \tag{11.15}$$

这里是对满足 $\mu(A)>0$ 的所有 $r$ 网立方体 $A$ 求和。(对取负值的 $q$，存在有关稳定性的问题：如果立方体 $A$ 刚刚截到 $\mathrm{spt}\mu$ 的边缘，则 $\mu(A)^q$ 可以是非常大。对这个困难有许多处理方法，例如求和只限制在中心部分与 $\mathrm{spt}\mu$ 相截的那些立方体上，但这里不继续探讨这个问题。)

这些矩和关系到 $N_r(\alpha)$：利用式(11.6)可以得出，对任意 $\alpha\geqslant 0$，如果 $q\geqslant 0$，则

$$M_r(q)=\sum\mu(A)^q\geqslant r^{q\alpha}N_r(\alpha) \tag{11.16}$$

而如果 $q<0$，则

$$M_r(q)=\sum \mu(A)^q \geqslant r^{q\alpha}\#\{A\text{是满足 } 0<\mu(A)\leqslant r^\alpha \text{的 } r\text{网立方体}\} \tag{11.17}$$

通过定义

$$\underline{\beta}(q)=\liminf_{r\to 0} \log M_r(q)/-\log r \tag{11.18}$$

及

$$\overline{\beta}(q)=\limsup_{r\to 0} \log M_r(q)/-\log r \tag{11.19}$$

来确定 $M_r(q)$ 所服从的幂定律的情形。(注意，许多文献中是用 $-\tau(q)$ 取代这里的 $\beta(q)$)，下述引理 说明了$\underline{f}_C$ 和$\overline{f}_C$与 $\underline{\beta}$ 和$\overline{\beta}$ 的勒让德变换的关系。

**引理 11.2**

设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有限测度，则对任意 $\alpha\geqslant 0$，

$$\underline{f}_C(\alpha)\leqslant \underline{f}_L(\alpha)\equiv \inf_{-\infty<q<\infty}\{\underline{\beta}(q)+\alpha q\} \tag{11.20}$$

及

$$\overline{f}_C(\alpha)\leqslant \overline{f}_L(\alpha)\equiv \inf_{-\infty<q<\infty}\{\overline{\beta}(q)+\alpha q\} \tag{11.21}$$

**证明** 首先取 $q\geqslant 0$，对给定的 $\varepsilon>0$，式(11.16) 及(11.9) 意味着对任意充分小的 $r$，

$$M_r(q)\geqslant r^{q(\alpha+\varepsilon)}N_r(\alpha+\varepsilon)\geqslant r^{q(\alpha+\varepsilon)}r^{-\underline{f}_C(\alpha)+\varepsilon} \tag{11.22}$$

则由式(11.18) 知

$$-\underline{\beta}(q)\leqslant q(\alpha+\varepsilon)-\underline{f}_C(\alpha)+\varepsilon$$

所以由 $\varepsilon$ 可以任意小，即得 $\underline{f}_C(\alpha)\leqslant\underline{\beta}(q)+\alpha q$，利用式(11.17)，且把 $\alpha$ 换成 $\alpha-\varepsilon$，通过类似的证明，可知对 $q<0$，这个不等式仍然成立。

对上谱的证明也类似：代替式(11.22)，可利用不等式：

$$M_r(q)\geqslant r^{q(\alpha+\varepsilon)}N_r(\alpha+\varepsilon)\geqslant r^{q(\alpha+\varepsilon)}r^{-\overline{f}_C(\alpha)+\varepsilon}$$

对任意小的 $r$ 成立。 □

由式(11.20) 和(11.21) 定义的勒让德变换$\underline{f}_L$ 和 $\overline{f}_L$ 有时称为测度 $\mu$ 的下、上勒让德谱。对许多测度来说，它们相应的式(11.20)

和式(11.21) 中的等号成立。确实，正如自相似测度一样，下、上值经常是相等的。经常发生的是，粗线条谱正好是函数$\beta(q)$的勒让德变换，这就可以用比极限更明确的方式来定义它。

勒让德变换在多重分形的精细理论中也发挥了主要的作用，这里再次要定义出合适的 $\beta$ 函数，使它的变换成为多重分形谱的好的选择。对网立方体的矩和式的一个连续的替换是：

$$\beta(q)=\lim_{r\to 0}\frac{\log\int\mu(B(x,r))^{q-1}\mathrm{d}\mu(x)}{\log r} \tag{11.23}$$

（如果极限不存在，则改成上或下极限），对性状良好的测度，$\beta$ 的勒让德变换就得出了多重分形谱。

为多重分形目的的另一种处理方法是利用豪斯道夫类型的测度。简言之，给定 $\mathbb{R}^n$ 上的测度 $\mu$ 及 $q,\beta\in\mathbb{R}$，利用下述三个步骤定义测度 $\mathcal{H}^{q,\beta}$：

$$\mathcal{H}_\delta^{q,\beta}(E)=\inf\left\{\sum_i\mu(B(x_i,r_i))^q(2r_i)^\beta: E\subset\bigcup_i B(x_i,r_i),\ x_i\in E,\ r_i\leqslant\delta\right\}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0^{q,\beta}(E)&=\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^{q,\beta}(E)\\ \mathcal{H}^{q,\beta}(E)&=\sup_{E'\subset E}\mathcal{H}_0^{q,\beta}(E')\end{aligned} \tag{11.24}$$

（利用球心在 $E$ 中的球族的覆盖，是为了避免 $q$ 是负数时出现的困难，最后一步是为了保证单调性的要求，即当 $E_1\subset E_2$ 时，$\mathcal{H}^{q,\beta}(E_1)\leqslant\mathcal{H}^{q,\beta}(E_2)$。对每个 $q$ 定义与豪斯道夫维数类似的 $\beta(q)$，在点 $\beta$,$\mathcal{H}^{q,\beta}(\mathbb{R}^n)$ 从$\infty$跳到 0，即如果 $\beta<\beta(q)$，$\mathcal{H}^{q,\beta}(\mathbb{R}^n)=\infty$，而如果 $\beta>\beta(q)$，则 $\mathcal{H}^{q,\beta}(\mathbb{R}^n)=0$ 。于是，与引理 11.2 类似的“精细”的结果成立：

$$f_H(\alpha)\leqslant\inf_{-\infty<q<\infty}\{\beta(q)+q\alpha\} \tag{11.25}$$

同样，对“性状良好”的测度 $\mu$，上式等号成立。

这种利用测度 $\mathcal{H}^{q,\beta}$(也可以用“填充”的类似的方法)的精细理论的处理方法在数学上是很精巧的，而且从几何性质，比如从测度的多重分形特性与到低维子空间的射影及交的关系看来，这种

处理方式似乎是多重分形理论的最合理的形式。

在一些特殊情形中，多重分形谱经常是难于估计和难于处理的。人们可能希望通过“计盒”去计算粗线条谱 $f_c$，例如，如果 $\mu$ 是平面内动力系统吸引子的驻留测度，通过对属于每个 $r$ 网正方形 $A$ 的初始点 $x$ 的迭代点所占比例的计算，可以用来估计满足 $\alpha_k \leqslant \log\mu(A)/\log r \leqslant \alpha_{k+1}$ 的正方形的个数，其中 $0 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_k$。对不同的 $r$ 考察这种“直方图”能研究出 $N_r(\alpha+\varepsilon)-N_r(\alpha-\varepsilon)$ 服从的幂定律的状况，因而估计出 $f(\alpha)$。然而，这种“直方图方法”往往是计算缓慢且又难于处理的。

一般来说，在确定多重分形谱的经验中，利用矩方法是比较令人满意的。这就是利用勒让德变换：对不同的 $q$ 和 $r$ 估计矩和式(11.15)并考察关于 $r$ 的幂定律状况，以式(11.18)和(11.19)一样的方式求出 $\beta(q)$。$\beta$ 的勒让德变换给出了 $\mu$ 的勒让德谱 $f_L(\alpha)$，由于有较充分的理由，这个谱经常被认为就是粗线条谱，通常矩法比直方图法更易于数值处理。但是，尽管如此，多重分形谱的实际计算仍然是困难重重的。

## 11.2 自相似测度的多重分形分析

本节将计算 2.2 节导出的自相似测度的多重分形谱。做此事并不只是因为自相似测度本身是重要的，同时也因为下面叙述的方法也是许多类型的测度的多重分形的计算模式。自相似测度具有良好的性状，因此上一节导出的各种多重分形谱对自相似测度来说都是相等的。

设 $\mu$ 是由带有概率 $p_1,\cdots,p_m$，相似比 $r_1,\cdots,r_m$ 的 $\mathbb{R}^n$ 上的具有相似性的概率 IFS 定义的自相似测度。(其中 $p_i>0$，且 $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$)；于是对任意集 $A$，$\mu$ 满足

$$\mu(A)=\sum_{i=1}^{m} p_i \mu(F_i^{-1}(A)) \tag{11.26}$$

见式(2.43)-(2.45)。因此 $E\equiv \mathrm{spt}\mu$ 是 IFS$\{F_1,\cdots,F_m\}$ 的吸引子。设强分离条件成立，即对任意 $i\neq j$，$F_i(E)\cap F_j(E)=\phi$，因此 $E$ 是完全不连通的。

回顾通常的记号，$\mathrm{I}_k=\{(i_1,\cdots,i_k):1\leqslant i_j\leqslant m\}$，标准序列 $(i_1,\cdots,i_k)$ 缩写成 $\boldsymbol{i}$。$X$ 为任意非空紧集，且对任意 $\boldsymbol{i}$，$F_{\boldsymbol{i}}(X)\subset X$，如果 $i\neq j$，$F_i(X)\cap F_j(X)=\phi$。(取 $X=E$ 即可)，记

$$X_{\boldsymbol{i}}=X_{i_1,\cdots,i_k}=F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(X) \tag{11.27}$$

为方便起见，设 $|X|=1$，所以对 $\boldsymbol{i}=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$

$$|X_{\boldsymbol{i}}|=r_{\boldsymbol{i}}\equiv r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_k} \tag{11.28}$$

及

$$\mu(X_{\boldsymbol{i}})=p_{\boldsymbol{i}}\equiv p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k} \tag{11.29}$$

下面将得出多重分形谱 $f_{\mathrm{H}}(\alpha)=\dim_{\mathrm{H}}E_\alpha$，它是辅助函数 $\beta$ 的勒让德变换。给定实数 $q$，定义 $\beta=\beta(q)$ 是满足下式的正数

$$\sum_{i=1}^{m}p_i^q r_i^{\beta(q)}=1 \tag{11.30}$$

易见 $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是满足

$$\lim_{q\to-\infty}\beta(q)=\infty,\quad \lim_{q\to\infty}\beta(q)=-\infty \tag{11.31}$$

的非升的实解析函数。用隐函数微分法对式(11.30)求导两次，即得

$$0=\sum_{i=1}^{m}p_i^q r_i^{\beta(q)}\left(\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}q^2}\log r_i+\left(\log p_i+\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}q}\log r_i\right)^2\right)$$

所以 $\beta$ 是 $q$ 的凸函数。设对所有的 $i=1,\cdots,m$，$\log p_i/\log r_i$ 不全一样，则 $\beta$ 是严格凸的：设从此往后都是这种情形以避免退化的情形出现。以 $f$ 表示 $\beta$ 的勒让德变换，并由下式给出：

$$f(\alpha)=\inf_{-\infty<q<\infty}\{\beta(q)+\alpha q\} \tag{11.32}$$

则 $f:[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]\to\mathbb{R}$，其中 $-\alpha_{\min}$ 及 $-\alpha_{\max}$ 是凸函数 $\beta$ 的渐近线的斜率。因为 $\beta$ 是严格凸的，所以对给定的 $\alpha$，式(11.32)中的最小值在唯一的点 $q=q(\alpha)$ 达到，由微分法知极值点发生在

$$\alpha = -\frac{d\beta}{dq} \tag{11.33}$$

所以

$$f(\alpha) = \alpha q + \beta(q) = -q\frac{d\beta}{dq} + \beta(q) \tag{11.34}$$

注意到如果 $q \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ 及 $\alpha \in (\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$ 中的任何一个已经给定，则其它两个可由式(11.30) 及(11.33) 确定。特别，通过对式(11.30)求导，可得

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i^q r_i^\beta \log p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i^q r_i^\beta \log r_i} \tag{11.35}$$

考察上式，可以看出

$$\alpha_{\min} = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \log p_i / \log r_i, \quad \alpha_{\max} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \log p_i / \log r_i \tag{11.36}$$

分别对应于 $q$ 趋于$\infty$和$-\infty$ 的情形 。

从勒让德变换的几何性质，易见 $f$ 在 $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ 上是连续的，而且，如果 $m$ 个数$\{\log p_i/\log r_i\}_{i=1}^m$ 是全不相同的，则$f(\alpha_{\min}) = f(\alpha_{\max}) = 0$，见练习 11.2。对式(11.34) 求导，并利用式(11.33)可得

$$\frac{df}{d\alpha} = \alpha\frac{dq}{d\alpha} + q + \frac{d\beta}{dq}\cdot\frac{dq}{d\alpha} = q \tag{11.37}$$

因为 $\alpha$ 增加时 $q$ 是下降的，所以 $f$是 $\alpha$ 的凸函数。

有一些特殊的 $q$ 值特别令人感兴趣，如果 $q=0$, 利用式(11.30) 及 IFS 的吸引子 $\mathrm{spt}\mu$ 的维数公式(2.42), 可知 $\beta(q) = \dim_H \mathrm{spt}\mu = \dim_P \mathrm{spt}\mu$。而且，由式(11.37) 知 ,$q=0$ 对应着$f(\alpha)$的最大值，因此 $\dim_H \mathrm{spt}\mu = \dim_P \mathrm{spt}\mu = \max_\alpha f(\alpha)$ 。

当 $q=1$, 式(11.30) 意味着 $\beta(q)=0$, 所以由式(11.34) 知$f(\alpha) = \alpha$, 而且 $\frac{d}{d\alpha}(f(\alpha)-\alpha)) = q-1=0$, 所以曲线$f(\alpha)$ 位于直线$f=\alpha$之下，并且恰好与之相切在对应 $q=1$ 的点。稍后将得

出 $\alpha(1)=f(\alpha(1))=\dim_H\mu=\dim_p\mu$（有关测度维数的定义见式(10.8)和(10.9)）。典型的自相似测度的 $\beta(q)$ 和 $f(\alpha)$ 的主要特性表示在图 11.2 上 。

我们的主要目的是证明 $\mu$ 的豪斯道夫及填充谱由 $\beta(q)$ 的勒让德变换式(11.32) 得到，即对 $\alpha\in[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$,

$$f_H(\alpha)=f_P(\alpha)=f(\alpha) \tag{11.38}$$

这里 $E_\alpha$ 是由式(11.2) 表示的具有局部维数 $\alpha$ 的点的集合，而 $f_H(\alpha)=\dim_H E_\alpha$ , $f_P(\alpha)=\dim_P E_\alpha$ 。

对实数 $q$ 和 $\beta$, 记

$$\Phi(q,\beta)=\sum_{i=1}^{m}p_i^q r_i^\beta \tag{11.39}$$

$\beta(q)$ 由 $\Phi(q,\beta(q))=1$ 定义，见式(11.30)。还需要下面的$(q,\beta(q))$附近的 $\Phi$ 的估计：

### 引理 11.3

对任意 $\varepsilon>0$ 及充分小的 $\delta>0$,

$$\Phi(q+\delta,\beta(q)+(-\alpha+\varepsilon)\delta)<1 \tag{11.40}$$

及

$$\Phi(q-\delta,\beta(q)+(\alpha+\varepsilon)\delta)<1 \tag{11.41}$$

**证明** 回顾一下 $d\beta/dq=-\alpha$, 所以如果 $\delta$ 充分小，

$$\beta(q+\delta)=\beta(q)-\alpha\delta+O(\delta^2)<\beta(q)+(-\alpha+\varepsilon)\delta \quad ,$$

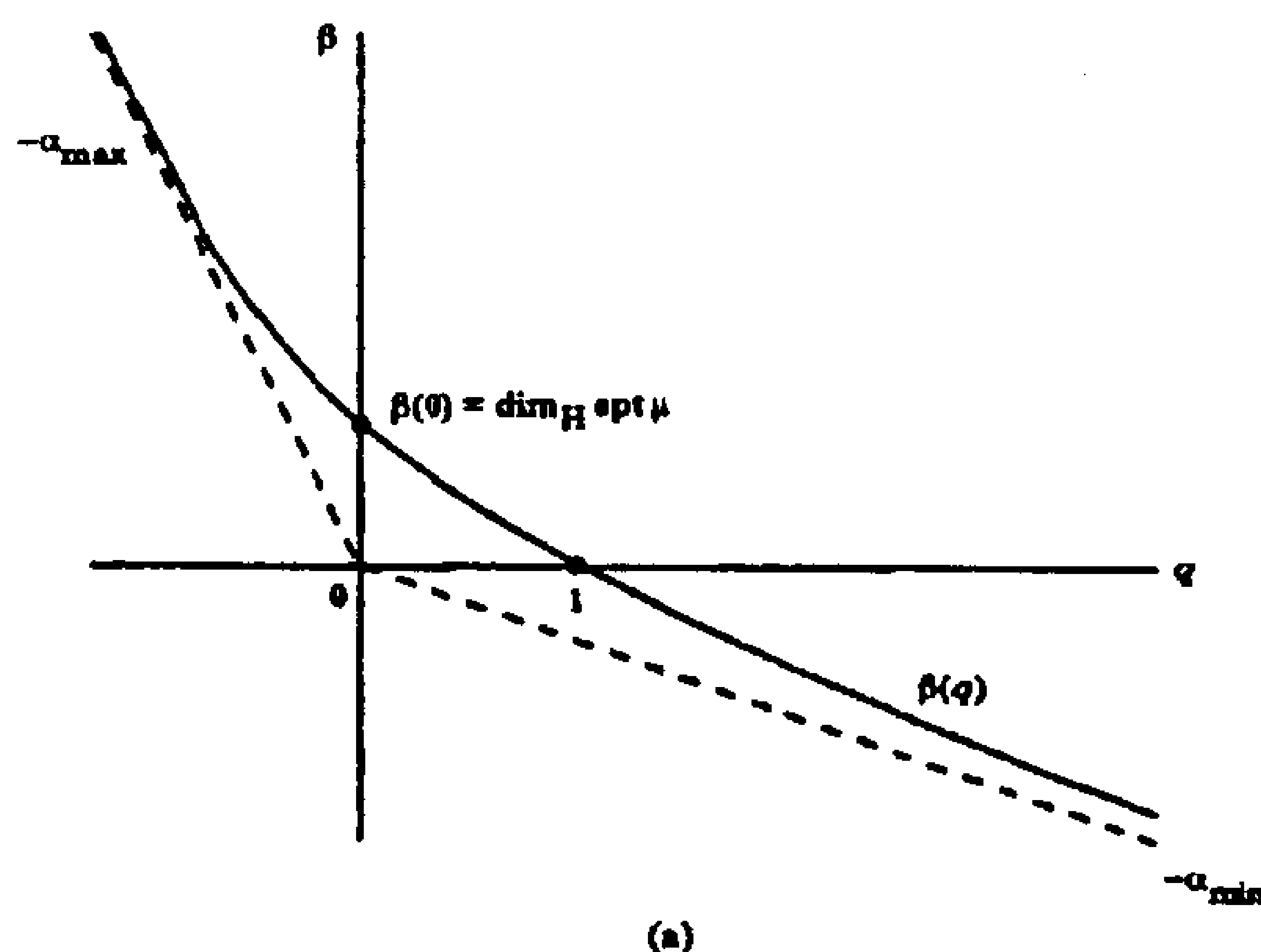
因为 $\Phi(q+\delta,\beta(q+\delta))=1$, 且 $\Phi$ 对它的第二个变量是递减的，所以式(11.40) 成立，不等式(11.41) 可以由类似的证明得出。 □

为了证明式(11.38), 考虑集中在 $E_\alpha$ 上的测度 $\nu$, 考察当 $r\to 0$ 时，$\nu(B(x,r))$ 服从的幂定律的状况，然后可以根据命题 2.3 求出 $E_\alpha$ 的维数. 对给定的 $q\in\mathbb{R}$ 及 $\beta=\beta(q)$, 在 spt$\mu$ 上定义概率测度 $\nu$:

$$\nu(X_{i_1,\cdots,i_k})=(p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k})^q(r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_k})^\beta \tag{11.42}$$

并按通常的方法将它延拓成波雷尔测度，图 11.3 是关于此种测度的一个例子。综合式(11.28)、(11.29),对 $\boldsymbol{i}\in I_k$,这里给出了量化

$X_i$的三种方法： $|X_i| = r_i$ , $\mu(X_i) = p_i$ , $\nu(X_i) = p_i^q r_i^\beta$ (11.43)



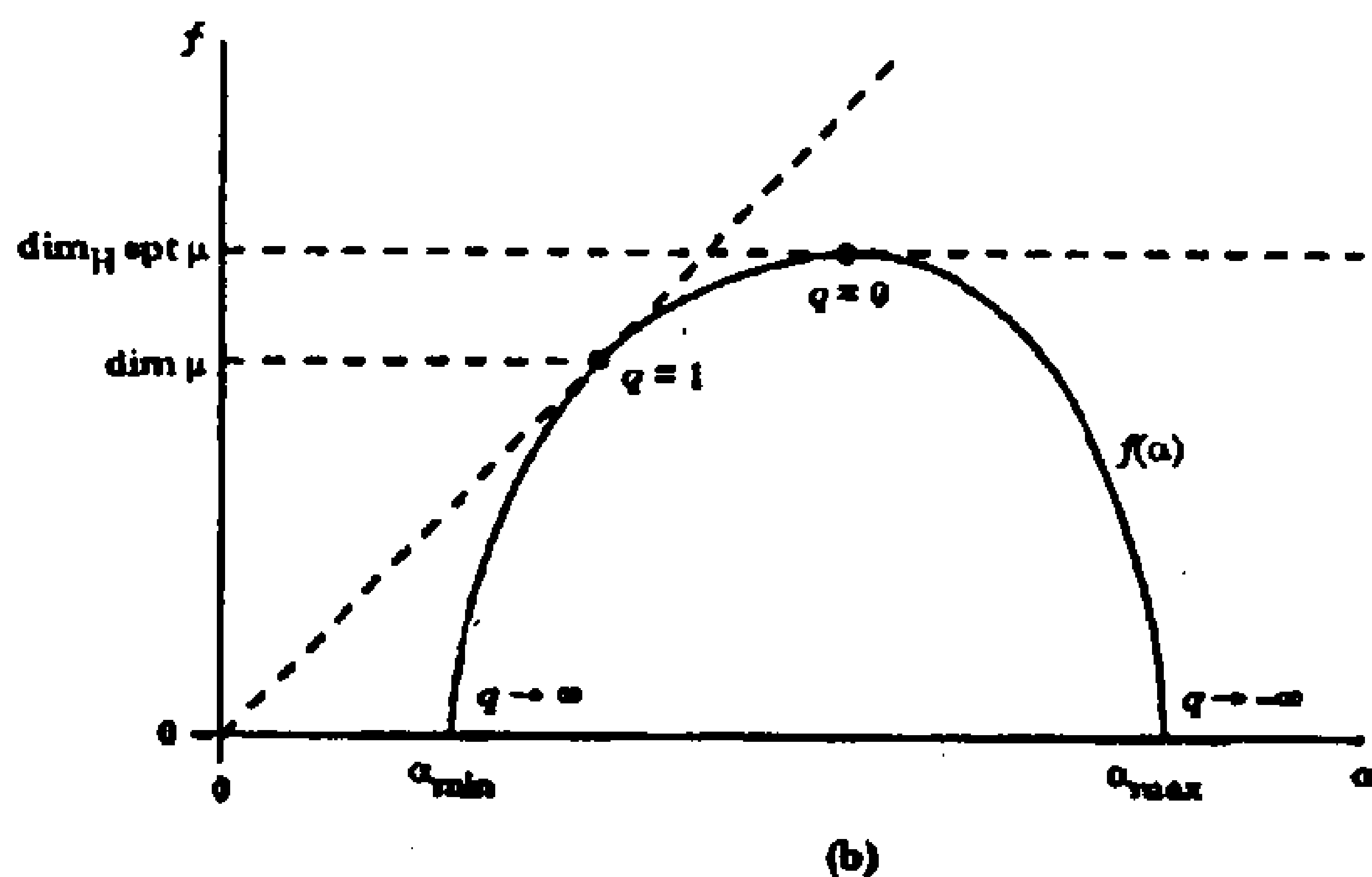




图 11.2 典型的自相似测度的多重分形函数的形式.(a) $\beta(q)$ 曲线；(b) "多重分形谱" $f(\alpha) = \dim_H E_\alpha$, 它是 $\beta(q)$ 的勒让德变换

对 $x \in \mathrm{spt}\mu$ ,记 $X_k(x)$ 为包含 $x$ 的第 $k$ 水平集 $X_{i_1,\cdots,i_k}$ ,下面将在$X_k(x)$及球 $B(x,r)$ 之间来回考虑，这里$|X_k(x)|$ 是与 $r$ 可比较的。特别，对任意 $\alpha$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log\mu(B(x,r))}{\log r} = \alpha \quad \text{当且仅当} \quad \lim_{k \to \infty} \frac{\log\mu(X_k(x))}{\log|X_k(x)|} = \alpha \quad (11.44)$$

见练习 11.3

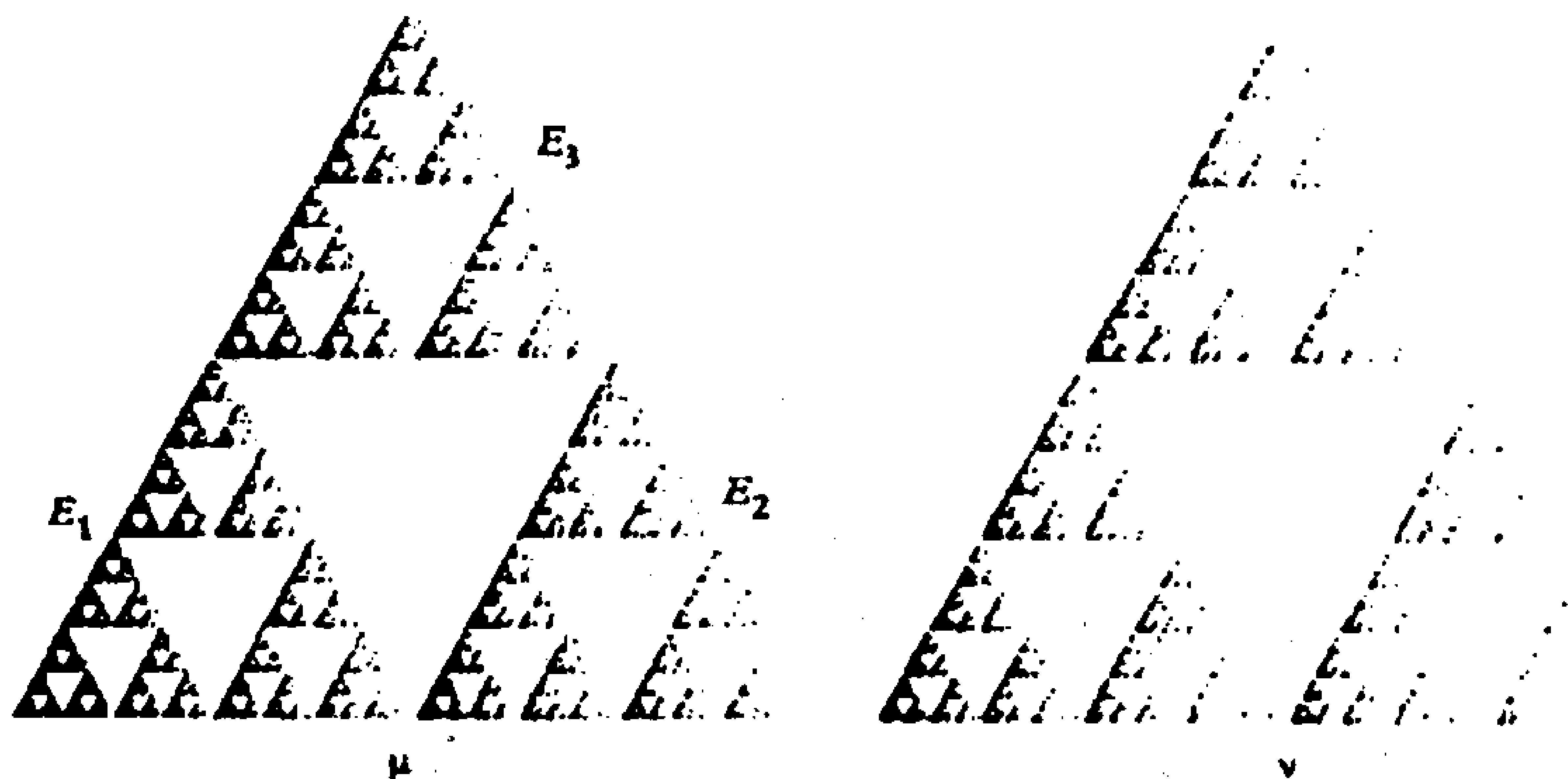



图 11.3 支撑在 Sierpinski 三角形上的自相似测度 $\mu$, 这个三角形是利用概率 $p_1=0.8, p_2=0.05, p_3=0.15$ 构造出来的, $\mu$ 具有局部维数 $\alpha=0.6$(对应于 $q=1.4$)。而集中在集 $E_\alpha$ 上的进行分析的测度 $\nu$ 是具有概率 0.896, 0.018, 和 0.086 的自相似测度, 由它得出 $\dim_H E_\alpha=f(\alpha)=1.138$

### 命题 11.4

$q, \beta, \alpha$ 及 $f$ 如上所述, 而 $\nu$ 是由式(11.42)定义的测度, 则

(a) $\nu(E_\alpha)=1$

(b) 对任意 $x\in E_\alpha$, 当 $r\to 0$ 时, $\log\nu(B(x,r))/\log r\to f(\alpha)$。

**证明** 给定 $\varepsilon>0$, 则对任意 $\delta>0$, 利用式(11.43)及利用多项展开式,

$$
\begin{aligned}
&\nu\{x: \mu(X_k(x))\geqslant |X_k(x)|^{\alpha-\varepsilon}\}\\
&=\nu\{x: 1\leqslant \mu(X_k(x))^{\delta}|X_k(x)|^{(\varepsilon-\alpha)\delta}\}\\
&\leqslant\int \mu(X_k(x))^{\delta}|X_k(x)|^{(\varepsilon-\alpha)\delta}\mathrm{d}\nu(x)\\
&=\sum_{i\in I_k}\mu(X_i)^{\delta}|X_i|^{(\varepsilon-\alpha)\delta}\nu(X_i)\\
&=\sum_{i\in I_k}p_i^{q+\delta}r_i^{\beta+(\varepsilon-\alpha)\delta}
\end{aligned}
\tag{11.45}
$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m} p_i^{q+\delta} r_i^{\beta+(\varepsilon-\alpha)\delta}\right)^k$$

$$=[\Phi(q+\delta,\ \beta+(\varepsilon-\alpha)\delta)]^k \tag{11.46}$$

其中 $\Phi$ 由式(11.39)定义。选取 $\delta$ 充分小并利用式(11.40), 即得

$$\nu\{x: \mu(X_k(x)) \geqslant |X_k(x)|^{\alpha-\varepsilon}\} \leqslant \gamma^k \tag{11.47}$$

其中 $\gamma<1$ 且与 $k$ 无关。于是

$$\nu\{x: 存在\ k \geqslant k_0\ 使\ \mu(X_k(x)) \geqslant |X_k(x)|^{\alpha-\varepsilon}\} \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^k \leqslant \frac{\gamma^{k_0}}{1-\gamma}$$

即对$\nu$-几乎所有的 $x$

$$\liminf_{k\to\infty} \log\mu(X_k(x))/\log|X_k(x)| \geqslant \alpha-\varepsilon$$

因为对任意$\varepsilon>0$,上式都成立,即得下面不等式中的左边的不等式:

$$\begin{aligned}\alpha &\leqslant \liminf_{k\to\infty} \log\mu(X_k(x))/\log|X_k(x)| \\ &\leqslant \limsup_{k\to\infty} \log\mu(X_k(x))/\log|X_k(x)| \\ &\leqslant \alpha\end{aligned}$$

利用式(11.41)估计 $\nu\{x: \mu(X_k(x)) \leqslant |X_k(x)|^{\alpha+\varepsilon}\}$, 用同样的方法可以得到上式的右边不等式。再利用式(11.44), 即知对 $\nu$-几乎所有的 $x$,

$$\lim_{r\to 0} \log\mu(B(x,r))/\log r = \lim_{k\to\infty} \log\mu(X_k(x))/\log|X_k(x)| = \alpha\ ;$$

因为 $\nu$ 是概率测度, 所以 $\nu(E_\alpha)=1$ 。

为证明(b)注意到由式(11.43)

$$\frac{\log\nu(X_k(x))}{\log|X_k(x)|} = q\frac{\log\mu(X_k(x))}{\log|X_k(x)|} + \beta\frac{\log|X_k(x)|}{\log|X_k(x)|} \tag{11.48}$$

所以对任意 $x \in E_\alpha$ , 利用式(11.34), 当 $k\to\infty$时

$$\frac{\log\nu(X_k(x))}{\log|X_k(x)|} \to q\alpha+\beta=f \tag{11.49}$$

因为在式(11.44)中用 $\nu$ 取代 $\mu$ 结论仍成立，所以(b)得证 □

由此容易得到关于自相似测度的多重分形谱的主要结论。

**定理 11.5**

设 $\mu$ 是如上所述的自相似测度，令

$$E_\alpha=\{x:\lim_{r\to 0}\log\mu(B(x,r))/\log r=\alpha\}$$

如果 $\alpha\notin[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$，则 $E_\alpha=\phi$，而如果 $\alpha\in[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$，则

$$\dim_H E_\alpha=\dim_P E_\alpha=f(\alpha) \tag{11.50}$$

即 $f_H(\alpha)=f_P(\alpha)=f(\alpha)$

**证明** 由式(11.43)

$$\log\mu(X_{\boldsymbol{i}})/\log|X_{\boldsymbol{i}}|=\sum_{j=1}^{k}\log p_{i_j}/\sum_{j=1}^{k}\log r_{i_j}$$

其中 $\boldsymbol{i}=(i_1,\cdots,i_k)$，所以由式(11.36)知对任意的 $\boldsymbol{i}$，$\log\mu(X_{\boldsymbol{i}})/\log|X_{\boldsymbol{i}}|\in[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$。于是 $\log\mu(X_{\boldsymbol{i}})/\log|X_{\boldsymbol{i}}|$ 可能的极限点只能在 $[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$ 上，类似地对式(11.44)中的 $\log\mu(B(x,r))/\log r$ 也一样。特别，如果 $\alpha\notin[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$，则 $E_\alpha=\phi$。

如果 $\alpha\in(\alpha_{\min},\alpha_{\max})$，则由命题 11.4，存在集中在 $E_\alpha$ 上的测度 $\nu$，使对任意的 $x\in E_\alpha$，$\lim_{r\to 0}\log\nu(B(x,r))/\log r=f(\alpha)$，所以由命题 2.3 即知式(11.50)成立。而对 $\alpha=\alpha_{\min}$ 及 $\alpha=\alpha_{\max}$ 的情形，见练习 11.5。 □

于是，对自相似测度，$E_\alpha$ 的维数可以通过先找到 $\beta(q)$，再做它的勒让德变换来计算。图 11.4 显示了多重分形谱的一个具体例子。

注意到可以考虑用

$$G_\alpha=\{x:\text{存在 } r_i\searrow 0,\text{ 使 }\lim_{i\to\infty}\log\mu(B(x,r_i))/\log r_i=\alpha\} \tag{11.51}$$

来代替 $E_\alpha$，它是以 $\alpha$ 为 $\log\mu(B(x,r))/\log r$ 的极限点的 $x$ 的集合。

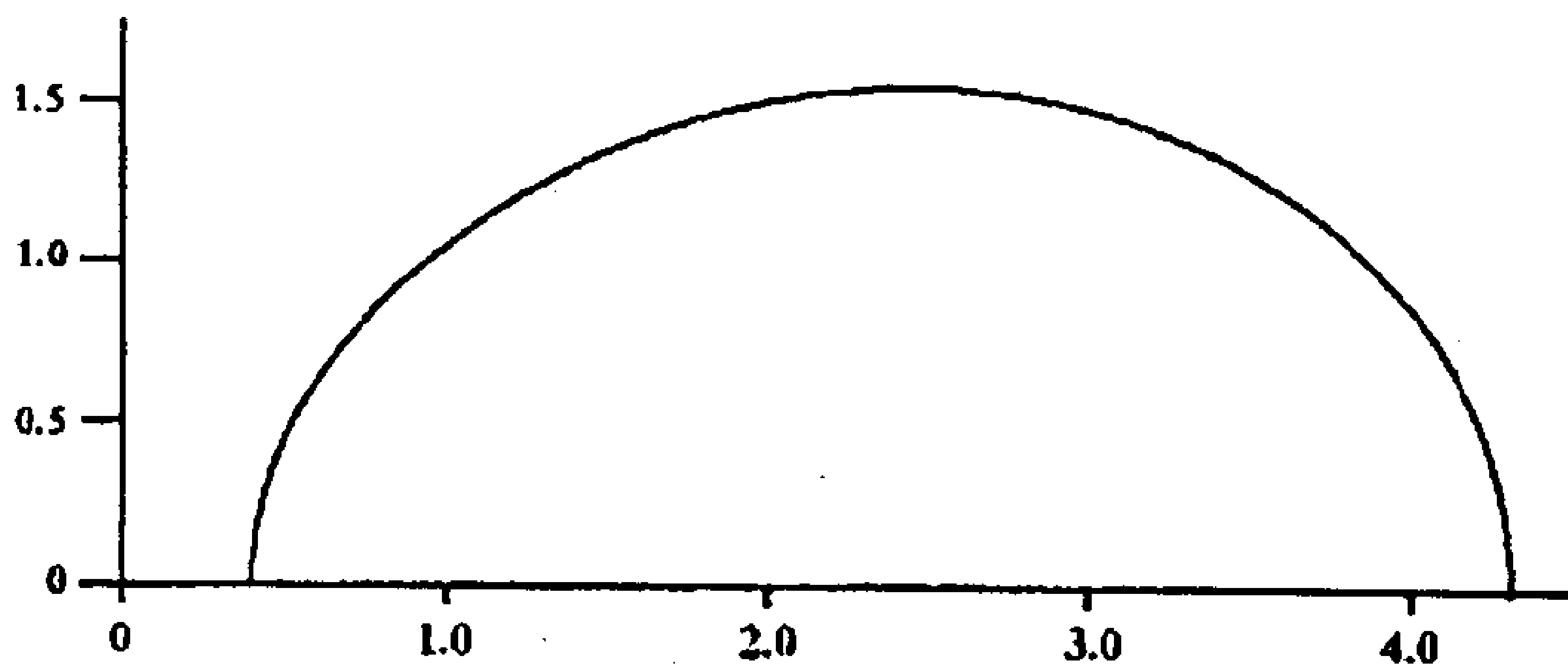



图11.4 显示在图11.3中的Sierpinski三角形上的自相似测度$\mu$的多重分形谱

显然$E_\alpha \subset G_\alpha$，所以由定理11.5，$f(\alpha)$是$G_\alpha$维数的下界；事实上，为证明$f(\alpha)=\dim_H G_\alpha=\dim_P G_\alpha$几乎不需要再做更多的计算，见练习11.6。

spt$\mu$及测度$\mu$的维数可以容易地由多重分形谱求出。

**命题 11.6**

设$\mu$是如上所述的自相似测度，将$\alpha=\alpha(q)$看成是$q$的函数，则：

(a) $f(\alpha)$在$\alpha=\alpha(0)$取到它的最大值，且$f(\alpha(0))=\dim_H \mathrm{spt}\mu=\dim_P \mathrm{spt}\mu$。

(b) $f(\alpha(1))=\alpha(1)=\dim_H\mu=\dim_P\mu$。

**证明** 注意到(a)及$f(\alpha(1))=\alpha(1)$是式(11.37)的直接推论。对测度的维数，如果$q=1$，则从式(11.30)知$\beta=0$，所以由式(11.42)知测度$\nu$等同于$\mu$。而由命题11.4知$\mu(E_{\alpha(1)})=1$及对任意的$x\in E_{\alpha(1)}$，$\dim_{\mathrm{loc}}\mu(x)=\lim_{r\to 0}\log\mu(B(x,r))/\log r=f(\alpha(1))$，所以由式(10,8)和(10.9)的测度维数的定义，即知(b)成立。 □

下面要证明，如果 $\alpha \leqslant \alpha(0)$，由式(11.32)给出的自相似测度的粗线条谱也等于$f(\alpha)$。

**命题 11.7**

设 $\mu$ 是如上所述的自相似测度，则对任意 $\alpha$，

$$f_C(\alpha) \geqslant f(\alpha) \tag{11.52}$$

而如果 $\alpha = \alpha(q)$，则上式等号成立，这里 $q \geqslant 0$。

**证明** 首先注意到，由定理 11.5 及引理 11.1 知，$f(\alpha) = f_H(\alpha) \leqslant \underline{f}_C(\alpha) \leqslant \overline{f}_C(\alpha)$，这里的粗线条谱由式(11.9)及(11.10)定义。

为证明相反的不等式，设 $d$ 是 $i \neq j$ 的 $X_i$ 与 $X_j$ 的最小间隔，记 $a = 2\sqrt{n}/d$，给定 $r < a^{-1}|X|$，又设 $J$ 是使 $|X_{i_1,\cdots,i_{k-1}}| \leqslant ar$ 的全部 $\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_k)$ 序列组成的集合。如果 $\boldsymbol{i} \in J$，则

$$ac_{\min} r < |X_{\boldsymbol{i}}| = r_{\boldsymbol{i}} \leqslant ar \tag{11.53}$$

其中 $c_{\min} = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} r_i$，注意到 $E$ 的每个点正好落在一个 $\boldsymbol{i} \in J$ 的 $X_{\boldsymbol{i}}$ 集中，且对不同的 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in J$，$X_{\boldsymbol{i}}$ 与 $X_{\boldsymbol{j}}$ 的间隔至少为 $ard = 2\sqrt{n}\,r$。

设 $q \geqslant 0$，且 $\beta, \alpha$ 及 $f$ 分别对应于式(11.30),(11.33)和(11.34)所给定的值。反复进行 $\sum_{i=1}^{m} p_{\boldsymbol{i},i}^{q} r_{\boldsymbol{i},i}^{\beta} = p_{\boldsymbol{i}}^{q} r_{\boldsymbol{i}}^{\beta}$ 的代换，可得等式 $\sum_{\boldsymbol{i} \in J} p_{\boldsymbol{i}}^{q} r_{\boldsymbol{i}}^{\beta} = 1$，利用这个等式及式(11.53),(11.54)，则

$$\begin{aligned}
\#\{\boldsymbol{i} \in J : \mu(X_{\boldsymbol{i}}) \geqslant a^{-\alpha}|X_{\boldsymbol{i}}|^{\alpha}\} &= \#\{\boldsymbol{i} \in J:\ 1 \leqslant a^{\alpha q} p_{\boldsymbol{i}}^{q} r_{\boldsymbol{i}}^{-\alpha q}\} \\
&\leqslant a^{\alpha q} \sum_{\boldsymbol{i} \in J} p_{\boldsymbol{i}}^{q} r_{\boldsymbol{i}}^{-\alpha q} \\
&= a^{\alpha q} \sum_{\boldsymbol{i} \in J} p_{\boldsymbol{i}}^{q} r_{\boldsymbol{i}}^{\beta} r_{\boldsymbol{i}}^{-\beta-\alpha q} \\
&\leqslant a^{\alpha q} (ac_{\min})^{-f} r^{-f}
\end{aligned} \tag{11.54}$$

每个$r$-网立方体的直径是 $\sqrt{nr}$，它最多与一个 $\boldsymbol{i} \in J$ 的 $X_{\boldsymbol{i}}$ 集相交。如果$N_r(\alpha)$ 按式(11.6) 定义，则

$$\begin{aligned}
N_r(\alpha) &= \#\{A:\ A\text{是 } r \text{ 网立方体，且 } \mu(A) \geqslant r^{\alpha}\} \\
&\leqslant \#\{\boldsymbol{i} \in J : \mu(X_{\boldsymbol{i}}) \geqslant a^{-\alpha}|X_{\boldsymbol{i}}|^{\alpha}\}
\end{aligned}$$

$$\leqslant a^{\alpha q}(ac_{\min})^{-f(\alpha)}r^{-f(\alpha)}$$

所以对充分小的 $\varepsilon$ 和 $r$, 存在常数 $c$, 使

$$N_r(\alpha+\varepsilon)-N_r(\alpha-\varepsilon)\leqslant N_r(\alpha+\varepsilon)\leqslant cr^{-f(\alpha+\varepsilon)}$$

由此,再利用式(11.10) 及 $f$ 的连续性,即得 $\overline{f}_c(\alpha)\leqslant f(\alpha)$, 于是式(11.52) 中的等号成立 。 □

对上面定义的粗线条谱,它的性状并不能保证相对于 $q<0$ 的 $\alpha$, 式(11.52) 中的等号成立。问题在于这种情况下,需要估计满足 $0<\mu(A)\leqslant r^{\alpha}$ 的$r$-网立方体$A$的个数,而这与满足 $\mu(X_i)\leqslant|X_i|^{\alpha}$ 的可比较大小的 $X_i$ 集的个数毫无相似之处。这个困难可以通过对式(11.6) 定义的 $N_r(\alpha)$ 按下面的方法重新定义来克服:即把 $N_r(\alpha)$ 定义为立方体 $A$ 与 $A'$ 个数的总和,其中 $A$ 是满足 $\mu(A)\geqslant r^{\alpha}$ 的 $r$-网立方体,而 $A'$ 是与 $A$ 具有相同中心,边长为 $A$ 边长一半且 $\mu(A')>0$ 的网立方体。通过这样定义 $N_r(\alpha)$,对由式(11.9) 和(11.10) 定义的粗线条谱,按命题 11.7 的论证方法,可以将式(11.52) 的等式延拓到所有的 $\alpha$ 。

## 11.3 在 cookie-cutter 集上的 Gibbs 测度的多重分形分析

用相当类似于上一节的分析方法,可以计算支撑在 4.1 节导出的 cookie-cutter 集的 Gibbs 测度的多重分形谱。这又是热力学形式体系能把自相似集的理论延拓到非线性情形的一个实例。

设 $f:X\to X$是具有 4.1 节描述的形式的 cookie-cutter 系统,其中 $X$ 是实闭区间,而$f^{-1}$: $X\to X$ 具有由 $F_1$ 和 $F_2$ 组成的两个分支。用通常的方法标记迭代集 $F_{i_1}\circ\cdots\circ F_{i_k}(X)=X_{i_1,\cdots,i_k}=X_i$。定理 5.3 证明,cookie-cutter 吸引子 $E$ 的维数 $\dim_H E$ 可以通过压力函数 $P$, 由满足 $P(-s\log|f'|)=0$ 的数 $s$ 得出。回顾一下,压力

给出了 $\sum_{i\in I_k}|X_i|^s$ 随 $k$ 增长的指数增长速度。而这里也得到了由$E$支撑的Gibbs 测度的多重分形谱的一个与压力类似的公式：即在此情形下，用压力去估计 $\sum_{i\in I_k}|X_i|^\beta\mu(X_i)^q$ 的增长速度。

设 $\mu$ 是与 $C^2$ 函数 $\phi:X\to\mathbb{R}$ 相关连的 $E$ 上的 Gibbs 测度，设 $\phi$具有的压力为 0, 则由式(5.6), 对任意 $i\in I_k$ 及 $x\in X_i$，

$$\mu(X_i)\asymp\exp(S_k\phi(x)) \tag{11.55}$$

其中 $S_k\phi(x)=\sum_{i=0}^{k-1}\phi(f^ix)$。(如果 $\phi$ 的压力非零，则可以用 $\phi-P(\phi)$ 代替 $\phi$, 而 $\phi-P(\phi)$ 的压力为零，且有相同的 Gibbs 测度)。又设对任意 $x\in X$,

$$\phi(x)<0 \tag{11.56}$$

这就保证了满足式(11.55) 的 $\mu(X_i)$ 保持有界。

在11.2 节中, 对自相似测度,通过要求 $\sum_{i=1}^m\mu(X_i)^q|X_i|^\beta=1$ 定义 $\beta(q)$,这意味着对任意$k$, $\sum_{i\in I_k}\mu(X_i)^q|X_i|^\beta=1$。而这里，则是利用压力定义 $\beta=\beta(q)$ 使它满足

$$\sum_{i\in I_k}\mu(X_i)^q|X_i|^\beta\asymp 1 \tag{11.57}$$

对其它任意的 $\beta$, 上面的和式以指数速度趋于 0 或$\infty$。由式(4.16) -(4.18), 对任意 $x\in X_i$

$$|X_i|\asymp\exp(-(S_k\log|f'|)(x)) \tag{11.58}$$

所以结合式(11.55), 条件(11.57) 变成

$$\sum_{x_i}\exp(S_k(-\beta\log|f'|+q\phi)(x_i))\asymp 1,$$

这里对每个 $i\in I_k$ ,$(x_i)\in X_i$。由式(5.5), 这是通过

$$P(-\beta(q)\log|f'|+q\phi)=0 \tag{11.59}$$

完成了对 $\beta(q)$ 的定义，其中 $P$ 是压力函数。为看清式(11.59) 是定义了唯一的 $\beta$, 注意到函数

$$(q,\beta)\mapsto P(-\beta\log|f'|+q\phi) \tag{11.60}$$

对 $\beta$ 和 $q$ 是严格递减且又连续的；这可以如引理 5.2 一样地验证，注意到存在 $m_1,m_2<0$, 使对在紧集 $X$ 中的任意 $x$，

$$m_1\leqslant-\log|f'(x)|,\phi(x)\leqslant m_2$$

再一次如引理 5.2 一样，对任意 $q$

$$\lim_{\beta\to\pm\infty} P(-\beta\log|f'|+q\phi)=\mp\infty$$

可以得出结论：$q\to\beta(q)$ 是连续的，且是严格递减的，并且

$$\lim_{q\to-\infty}\beta(q)=\infty\quad,\quad\lim_{q\to\infty}\beta(q)=-\infty\quad.$$

可以证明函数(11.60) 是凸的(见练习 11.11)，即它的图是凸曲面。因此 $q\to\beta(q)$ 是凸函数(它的图是上述曲面与平面 $P=0$ 的截线)。同样也可以证明 $\beta$ 是可微的(虽然这相当困难)，并确实是 $q$ 的实解析函数。因此 $\beta$ 的整个形式与图 11.1 表示的自相似测度的谱非常相似。为避免对退化情形的分析，再一次假设 $\beta$ 是严格凸的。

为求出集

$$E_\alpha=\{x:\lim_{r\to 0}\log\mu(B(x,r))/\log r=\alpha\}$$

的维数，再一次考察勒让德变换

$$f(\alpha)=\inf_{-\infty<q<\infty}\{\beta(q)+q\alpha\}$$

正象式(11.33)－(11.34) 的自相似情形一样

$$f(\alpha)=\beta(q)+q\alpha\ ，\ 其中\ \alpha=-\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}q}\tag{11.61}$$

且 $f:[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ 是连续的凹函数。而且 $q=0$ 及 $q=1$ 这两个数值与自相似情形有同样的含义。

证明 $f(\alpha)=\dim_H E_\alpha=\dim_P E_\alpha$ 与 11.2 节中介绍的自相似测度的情形非常相似，关键的一步也是引出一个与式(11.42) 类似的，集中在 $E_\alpha$ 上的测度 $\nu$；然而，这里需要的测度自然是 Gibbs 测度。

于是，对给定的 $q$，定义 $\beta$、$\alpha$ 及 $f$ 如上，令 $\nu$ 是函数 $-\beta\log|f'|+q\phi$ 的 Gibbs 测度。因为 $\beta$ 是定义成使这个函数压力为零，所以由式(5.6)，对任意 $\boldsymbol{i}\in I_k, k\in\mathbb{Z}^+$ 及 $x\in X_{\boldsymbol{i}}$，

$$\nu(X_{\boldsymbol{i}})\asymp\exp(-\beta(S_k\log|f'|)(x)+q(S_k\phi)(x))。$$

利用式(11.55) 及(11.58)，即得

$$\nu(X_{\boldsymbol{i}})\asymp|X_{\boldsymbol{i}}|^\beta\mu(X_{\boldsymbol{i}})^q\tag{11.62}$$

对 $x\in \mathrm{spt}\mu$，记 $X_k(x)$ 为包含 $x$ 的 $X_{i_1,\cdots,i_k}$集，由系 4.3 的结论，用自相似测度情形一样的方法，在 $X_k(x)$ 和 $B(x,r)$ 之间来回考虑，其中 $|X_k(x)|$ 是与 $r$ 可比较的。于是，可以得到：

$$\lim_{r\to 0}\frac{\log\mu(B(x,r))}{\log r}=0 \text{ 当且仅当 } \lim_{k\to\infty}\frac{\log\mu(X_k(x))}{\log|X_k(x)|}=\alpha \quad (11.63)$$

下面是类似于引理 11.3 的有关压力的性质。

**引理 11.8**

对任意 $\varepsilon>0$ 及任意充分小的 $\delta$，

$$P(-(\beta(q)+(\varepsilon-\alpha)\delta)\log|f'|+(q+\delta)\phi)<1$$

且

$$P(-(\beta(q)+(\varepsilon+\alpha)\delta)\log|f'|+(q-\delta)\phi)<1$$

**证明** 见式(11.61)，给出 $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}q}=-\alpha$，以下的证明几乎与引理 11.3 的证明完全一样。 □

**命题 11.9**

$\beta,\alpha$ 和 $f$ 是通过 $q$ 定义的，而 $\nu$ 如上所述，则

(a) $\nu(E_\alpha)=1$，

(b) 对任意 $x\in E_\alpha$，当 $r\to 0$ 时，$\log\nu(B(x,r))/\log r\to f(\alpha)$。

**证明** 给定 $\varepsilon>0$，与式(11.45)的证明一样，但这里利用的是式(11.62)，对任意 $\delta>0$，利用式(11.62),(11.55),(11.58)及式(5.5)压力的定义，可得

$$\begin{aligned}
&\nu\{x:\mu(X_k(x))\geqslant|X_k(x)|^{\alpha-\varepsilon}\}\\
&\leqslant\sum_{i\in I_k}\mu(X_i)^\delta|X_i|^{(\varepsilon-\alpha)\delta}\nu(X_i)\\
&\leqslant c\sum_{i\in I_k}\mu(X_i)^{q+\delta}|X_i|^{\beta+(\varepsilon-\alpha)\delta}\\
&\leqslant c_1\gamma^k
\end{aligned}\qquad(11.64)$$

其中 $\gamma=P(-(\beta+(\varepsilon-\alpha)\delta)\log|f'|+(q+\delta)\phi)$，而 $c$ 和 $c_1$ 与 $k$ 无

关. 由引理 11.8 知对充分小的 $\delta$, $\gamma<1$。所以由式(11.64) 知(a)成立, 这与命题 11.4 的(a) 是由式(11.47) 得出的完全一样。

由式(11.62), $\nu(X_k(x))\asymp\mu(X_k(x))^q|X_k(x)|^\beta$, 所以, 对 $x\in E_\alpha$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log\nu(X_k(x))}{\log|X_k(x)|}=\lim_{k\to\infty}q\frac{\log\mu(X_k(x))}{\log|X_k(x)|}+\beta$$
$$=q\alpha+\beta$$

利用式(11.63), 首先可以得到(b) 对 $\mu$ 成立, 也即对 $\nu$ 成立。 □

**命题　11.10**

设 $\mu$ 是如上所述的对应于 $\Phi$ 的 Gibbs 测度, 则对

$$E_\alpha=\{x:\lim_{r\to 0}\log\mu(B(x,r))/\log r=\alpha\}$$

成立等式: $\dim_H E_\alpha=\dim_P E_\alpha=f(\alpha)$ ,　只要 $\alpha\in(\alpha_{\min},\alpha_{\max})$。

**证明**　与定理 11.5 的证明一样, 利用 $\nu$ 是 $E_\alpha$ 上的测度及命题 11.9 的(a) 和(b), 由命题 2.3 即知上面的等式成立。 □

注意命题 11.6 中关于 $q=0$ 或 $q=1$ 的含义一样适用于 Gibbs 测度的情形。

## 11.4　注记与参考文献

已有许多关于多重分形的著作, 并且对许多特殊的测度计算出了相应的多重分形谱。目前能做的也只是下面所叙述的, 可以从这些有关的文献中找到进一步的细节。

从分形的观点研究测度的思想包含在 Mandelbrot (1975, 1982) 的论文中 ,Frisch 和 Parisi(1985) 以及 Halsey 等人(1986) 把勒让德变换引进了多重分形分析。Falconer(FG),Feder(1988), Evertsz 及 Mandelbrot (1992) 和 Tél(1988) 在令人满意的水平上描述了多重分形的各种不同的处理方法。有关多重分形的基本文献目录可以在 Olsen(1994)的著作中找到。Brown 等人(1992)及

Olsen(1995) 给出了对多重分形理论，包括式(11.24) 的豪斯道夫类型的测度，以及不同类型谱的关系的详细又严格的处理方法。Riedi(1995) 给出了对粗线条理论的细致的处理.

Cawley 和 Mauldin(1992) 分析了自相似测度，而 Edgar 和 Mauldin(1992) 把它延拓到测度的定向图的构造上。Rand(1989) 给出了 cookie－cutter 集上测度的多重分形谱，Lopes(1989) 研究了在复平面上有理映射的不变测度。King(1995) 和 Olsen(1996) 考虑了自仿射测度，而 Mandelbrot 和 Riedi(1995) 考虑了由无穷多个相似变换组成的 IFS 构造的自相似测度。Falconer 和 O'Neil (1996) 导出了向量值的多重分形测度 。

自然存在着自相似测度的随机版本，在这其中自相似比及测度分割的比在每次细分中都是独立同分布的随机变量。在这种情况下，$\beta$ 函数是由指数方程 $\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{m} P_i^q R_i^{\beta(q)})=1$ 定义。(其中 $P_i$ 和 $R_i$ 都是以统计自相似测度和结构的几何性质为基础的随机变量.) 且随机测度的几乎必然的多重分形谱是由 $\beta$ 的勒让德变换给出。Mandelbrot(1974),Kahane 和 Peyriere(1976),Olsen(1994)( 他还考虑了定向图测度的随机版本) 及 Arbeiter 和 Patzschke(1996) 等考虑了这样的测度。其中 Arbeiter 及 Patzschke 是在相当弱的分离条件下考虑的( 这关系到非随机情形的开集条件 )。

还有许多研究测度的多重分形性状的其它方法，例如，由 Hentschel 和 Procaccia(1983) 用 $d_q=\beta(q)/q-1$ 定义的广义维数经常被研究，其中在粗线条情形 $\beta$ 是由式(11.18) 和(11.19) 给出，而在精细情形是由式(11.23) 给出。( 由 $1/q-1$ 规范保证了对任意 $q$，一个均匀分布在 $n$ 维空间的开区域的测度都满足 $d_q=n$。)，测度的多重分形的性质也经常被表示成它们的傅立叶变换的形式，见 Strichartz(1993)，和它们的小波变换形式，见 Holschneider (1995)。

多重分形性质的许多方面刚刚开始被理解，比如负维数的解

释可参见Mandelbrot(1991)的文章。而多重分形严格的几何性质，比如它们在射影、截集、乘积之下的性质，可看Olsen(1996)的文章。

## 练习

11.1　求出$\beta(q)=e^{-q}$的勒让德变换。

11.2　对由式(11.26)或(11.29)定义的自相似测度，证明$\beta(q)$的图到原点的双重渐近性：如果数$\{\log p_i/\log q_i\}_{i=1}^{m}$全都不相同，则$f(\alpha_{\min})=f(\alpha_{\max})=0$。

11.3　对满足强分离条件的自相似测度直接验证式(11.44)。

（注意关于式(11.63)的cookie－cutter测度的更一般的结果可以容易地由系4.3推出）

11.4　利用强大数定律，按命题10.4的证明思路构造一个对命题11.4的证明。

11.5　当$\alpha=\alpha_{\min}$，证明式(11.50)成立。(提示：取$\alpha$接近$\alpha_{\min}$，并注意到用"如果对任意$x$，$\log\mu(B(x,r))/\log r\leqslant\alpha$，则$\lim\limits_{r\to 0}\log\nu(B(x,r))/\log r\leqslant f(\alpha)$"代替命题11.4中的(b)，命题11.4仍成立。

11.6　$\mu$是式(11.26)或(11.29)定义的自相似测度，而$G_\alpha$由式(11.51)定义，证明：$\dim_H G_\alpha=f(\alpha)$。(提示：证明$\sum_{i\in J_k}|X_i|^f\leqslant\sum_{i\in I_k}|X_i|^\beta\mu(X)_i^{q\alpha/(\alpha-\varepsilon)}$其中$J_k=\{i:i\in I_k$且$\mu(X_i)\geqslant|X_i|^{\alpha-\varepsilon}\}$。)

11.7　设$\mu$是支撑在三分康托集(所以$r_1=r_2=\frac{1}{3}$)上且按下面方式定义的自相似测度，它是把测度按$p_1:p_2$的比例反复细分到康托集的左右两部分而得到的，其中$p_1+p_2=1$。求出$\beta(q)$的表达式，并因此用参数$q$表示出$\alpha$和$f$。

11.8　设$\mu$是按下面方式构造的自相似测度，它是由把测度按$p_1:p_2$的比例反复细分到比例为$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{4}$的两个子区间上而得到的。求出$\beta(q)$的明确的表达式。

11.9 设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有限测度，$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是双李卜希兹函数，定义 $\mathbb{R}^n$ 上的象测度 $\nu$ 满足 $\nu(A)=\mu(g^{-1}(A))$，证明 $f_{\mathrm{H}}(\alpha)$(由式(11.4)定义)对 $\nu$ 和 $\mu$ 是相同的。(提示：参考练习10.1)。

11.10 设 $\mu_1, \mu_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的具有不交支撑的有限测度，定义 $\nu=\mu_1+\mu_2$，证明 $f_{\mathrm{H}}^{\nu}(\alpha)=\max\{f_{\mathrm{H}}^{1}(\alpha), f_{\mathrm{H}}^{2}(\alpha)\}$，其中 $f_{\mathrm{H}}^{\nu}$，$f_{\mathrm{H}}^{1}$ 和 $f_{\mathrm{H}}^{2}$ 分别是 $\nu$，$\mu_1$ 和 $\mu_2$ 的豪斯道夫谱。并证明在 $\alpha$ 不为零的范围内，$f_{\mathrm{H}}(\alpha)$ 不一定是凹的。

11.11 证明式(11.60)定义了一个二元变量 $(q,\beta)$ 的凸函数。(提示：利用微分证明压力的定义和式对任意 $k$ 是凸的，然后取 $k\to\infty$ 时的极限。)。

# 第 12 章　分形与微分方程

分形几何可以通过许多方式与微分方程理论相互影响。例如，微分方程的解可以逼近分形吸引子，或者，可以期望寻找出具有分形边界的区域上的解，或者这个区域本身就是分形。

本章论及分形几何和微分方程之间的这种有吸引力的相互作用。当然，就这个内容本身很容易就可以写成一本书，但在这里，仅仅对论述这个课题做点尝试，并且就很少几个特殊的情况指出一些基本的思想。在这个领域的数学问题经常是很复杂的；在这里，一般不给出完整的证明，并且省略掉许多技术细节。例如，对微分方程的解本应该在适当的函数或分布空间认真地研究(事实上、应证明它的存在性)。

## 12.1　吸引子的维数

在这一节中，介绍估计动力系统和微分方程的吸引子(它们通常是分形)的维数的方法。这种寻找维数上界的方法已经广泛地应用到各种不同的系统。包括许多关于物理的基本偏微分方程，这使我们能洞察吸引子的性质。这里，可以比阐述基本估计做得更多一些，并且可以说明它在一些简单情形中的作用。

这方面的基本思想是简单的，设 $X$ 是开集，$f: X\to X$是连续的，考虑紧不变集 $E\subset X$ 即$f(E)=E$。如果 $E$ 的邻域 $U$在点迭代下逼近集 $E$，即 $E=\bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(U)$, 在这个意义下，集 $E$ 通常是系统的吸引子。豪斯道夫测度和维数是通过覆盖 $E$ 的小集合族$\{U_i\}_i$ 的和式 $\sum_i|U_i|^s$ 来定义的，然而，由于 $E$ 的不变性，如果$\{U_i\}_i$ 覆盖 $E$, 则对每个 $k=1,2,\cdots$, 覆盖的迭代$\{f^k(U_i)\}_i$ 也同样覆盖 $E$。把集 $f^k(U_i)$分割成合适的小块通常仍给出 $E$ 的覆盖，而这种覆盖比原

始的覆盖能给出豪斯道夫测度和维数的更精确的界。我们通过 $f$ 的导数来估计 $f^k(U_i)$ 的大小和形状，而这种导数可以几何地看成是对 $f$ 的局部近似的仿射映射。

首先，考虑线性映射（我们最终可以取这个映射为导数）是如何把球变成椭圆。设 $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是线性的，定义奇异值 $\alpha_1(L)\geqslant\alpha_2(L)\geqslant\cdots\geqslant\alpha_n(L)\geqslant 0$ 为椭球 $L(B)$ 的（相互垂直）主半轴的长度，其中 $B$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球，见图 12.1 。等价地，$\alpha_j(L)$ 是 $L^*L$ 的特征值的正的平方根。这里 $L^*$ 是 $L$ 的转置矩阵。

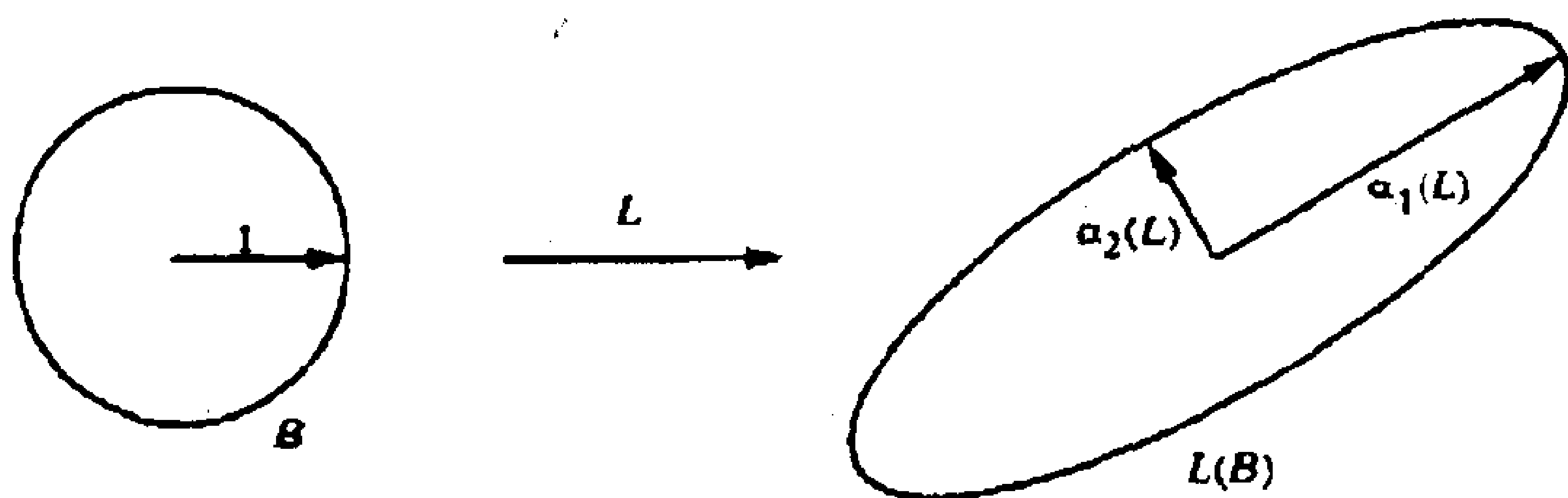



图 12.1 线性映射 $L$ 的奇异值

对 $0\leqslant s\leqslant n$，定义奇异值函数 $\omega_s$

$$\omega_s(L)=\alpha_1(L)\cdots\alpha_{m-1}(L)\alpha_m(L)^{s-m+1} \tag{12.1}$$

其中 $m$ 是使 $m-1<s\leqslant m$ 的整数，则 $\omega_s(L)$ 是 $s$ 的连续函数，且对满足 $m-1<s\leqslant m$ 的 $s$ 值，当 $\alpha_m(L)>1$ 时 $\omega_s(L)$ 是递增的，而当 $\alpha_m(L)<1$，$\omega_s(L)$ 是递减的。注意到如果 $m$ 是整数，则 $\omega_m(L)$ 是取遍所有 $\mathbb{R}^n$ 中的 $m$ 维圆盘 $D$ 时，$\mathcal{L}^m(L(D))/\mathcal{L}^m(D)$ 的最大值，其中 $\mathcal{L}^m$ 是 $m$ 维平面的子集的 $m$ 维体积。特别，$\omega_1(L)=\|L\|$，这里 $\|\ \|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的欧几里得范数，且 $\omega_n(L)=|\det L|$，这里 det 表示行列式。

可以证明（见练习 12.17）$\omega_s$ 对每个 $s$ 是半可乘的，即对任意的线性映射 $L_1, L_2$，

$$\omega_s(L_1L_2)\leqslant\omega_s(L_1)\omega_s(L_2) \tag{12.2}$$

维数的计算依赖于用小集合对近似于椭球的小球的覆盖图。

**引理　12.1**

设 $A$ 是具有半轴长度为 $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots$ 的椭球，则对 $m=1,2,\cdots$，存在一个集合最多为 $4^{m-1}\beta_1\beta_2\cdots\beta_{m-1}\beta_m^{-(m-1)}$ 个，每个集的直径最多为$(m+3)^{\frac{1}{2}}\beta_m$ 的 $A$ 的覆盖。

**证明**　注意到对 $j=1,2,\cdots m-1$，$A$ 的第 $j$ 个主轴长为 $2\beta_j$，最多能用 $4\beta_j/\beta_m-1$个相互距离为 $\beta_m$的垂直于第$j$个主轴的相互平行的超平面切割 $A$，见图 12.2。这些超平面最多能将 $A$ 切割成$(4\beta_1/\beta_m)(4\beta_2/\beta_m)\cdots(4\beta_{m-1}/\beta_m)$个小块，每一小块在第 $j$ 个主轴上的投影的长度最多为 $\beta_m$，$j=1,2,\cdots,m-1$。而且，如果 $V$ 是垂直于前 $m-1$ 个主轴的子空间，则上述每一个小块到 $V$ 的射影包含在半径为 $\beta_m$ 的球内。因此每一小块的直径最多为$[(m-1)\beta_m^2+(2\beta_m)^2]^{\frac{1}{2}}=(m+3)^{\frac{1}{2}}\beta_m$，引理得证。　□

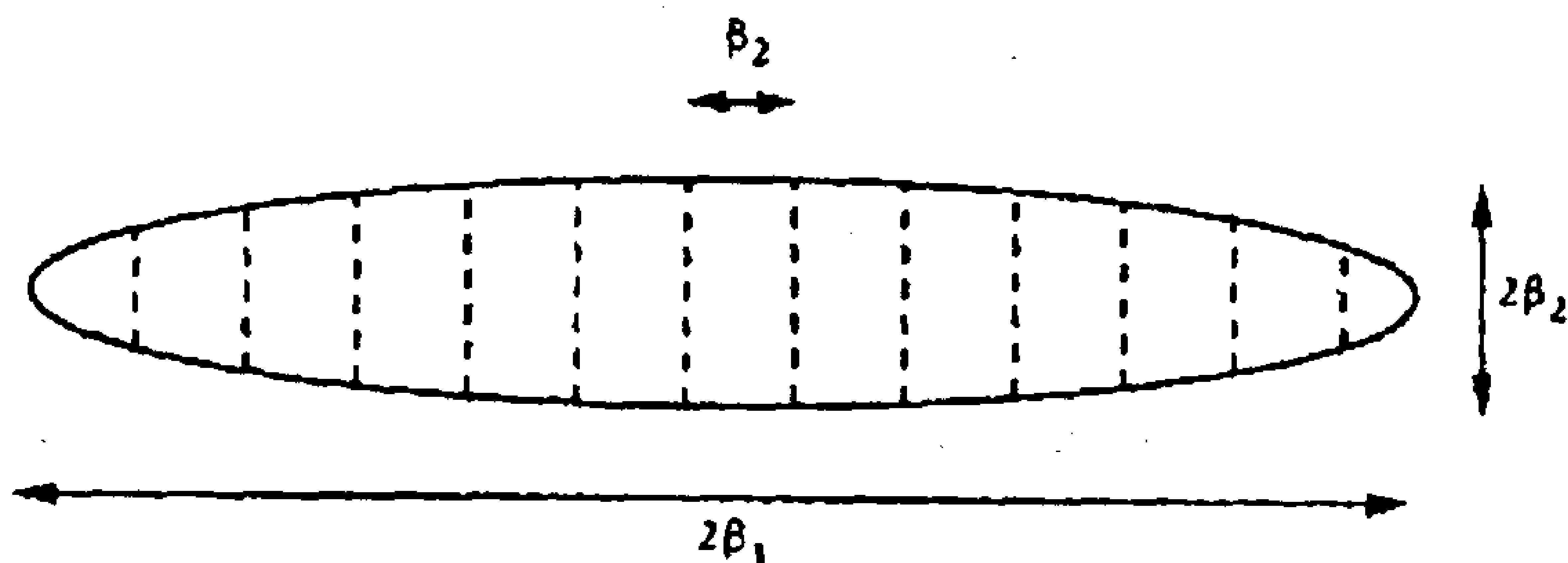



图 12.2　分割椭圆成小片

设 $X$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，且$f: X \to X$ 连续可导，设 $E$ 是 $X$ 的紧不变子集使得$f(E)=E$。我们的目的就是想通过有关 $f$的参数来估计 $E$ 的豪斯道夫维数，假定 $f$在 $E$ 上是一致可导的，即 $f$ 在 $X$

的导数是一个线性映射 $f'(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 且满足

$$\lim_{y\to x}|f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)|/|y-x|=0 \tag{12.3}$$

并对任意的 $x\in E$ 一致收敛 。

在下面的证明中，用小球 $B_i$ 覆盖 $E$, 注意到集 $f^k(B_i)$ 粗略地是具有半轴长度为 $\frac{1}{2}|B_i|\alpha_j((f^k)'(x))$ 的椭球，其中 $x$ 是 $B_i$ 的球心。根据引理 12.1 的方法覆盖每一个这样的椭球，就得到对不变集 $E=f^k(E)$ 的一个精确的覆盖，见图 12.3

定义

$$\omega_s\equiv\sup_{x\in E}\omega_s(f'(x))<\infty \tag{12.4}$$

其中 $\omega_s(\cdot)$ 是由式(12.1)定义的奇异值函数 。

**定理 12.2**

设 $f$ 如上所述，$E$ 是 $f$ 的不变集，如果对 $0<s\leqslant n, \omega_s<1$, 则 $\dim_H E\leqslant s$ 。

**证明** 设 $m$ 是满足 $m-1<s\leqslant m$ 的整数，令 $a=2(m+3)^{\frac{1}{2}}$, 又设 $k$ 是充分大的整数，使对任意 $x\in E$,

$$\omega_s^k\leqslant\min\{(2a)^{-s},\ 4^{1-m}a^{-s}\} \tag{12.5}$$

则利用链条法则式(12.2)和(12.4)

$$\begin{aligned}\omega_s((f^k)'(x))&=\omega_s(f'(f^{k-1}x)\circ f'(f^{k-2}x)\circ\cdots\circ f'(x))\\&\leqslant\omega_s(f'(f^{k-1}x))\omega_s(f'(f^{k-2}x))\cdots\omega_s(f'(x))\leqslant\omega_s^k\end{aligned} \tag{12.6}$$

注意到由式(12.1)和(12.5), 这意味着

$$\alpha_m((f^k)'(x))\leqslant\omega_s((f^k)'(x))^{1/s}\leqslant(2a)^{-1} \tag{12.7}$$

因为 $f$ 在 $E$ 上一致可导，所以 $f^k$ 也一样在 $E$ 上一致可导。于是存在 $r_0>0$, 使得任意的 $0<r\leqslant r_0$ 及 $x\in E$, 集 $f^k(B(x,r))$ 包含在半轴的长度分别为 $2r\alpha_1((f^k)'(x)), 2r\alpha_2((f^k)'(x))\cdots$ 的椭球内 。假设 $r_0$ 充分小，使得对任意 $x\in E, B(x,r_0)\subset X$。由引理 12.1, 可以用半径最多为 $ra\alpha_m((f^k)'(x))$, 个数最多为

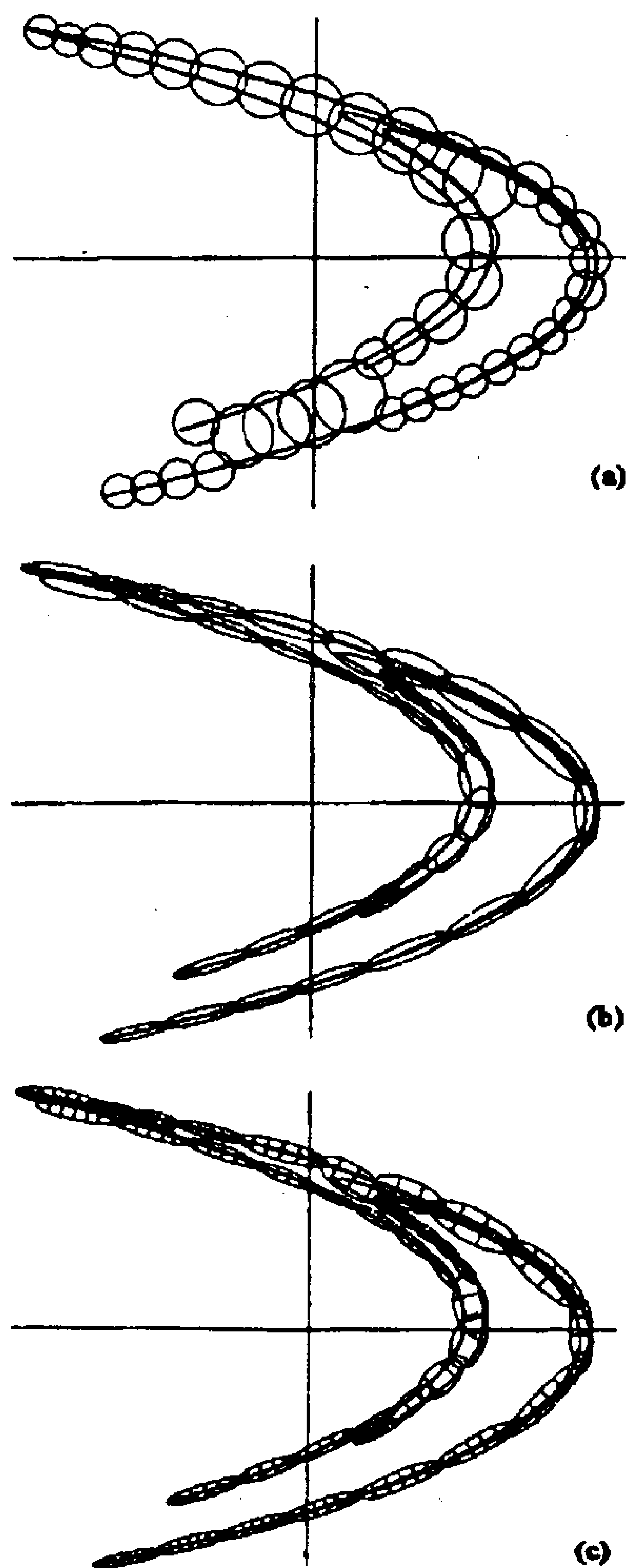



图 12.3 对在映射 $f$ 下的不变集 $E$ 的 $\dim_H E$ 的估计:(a) 用圆盘覆盖 $E$ 来估计维数;(b) 圆盘在 $f$ 的映射下(更一般地用 $f^k$ 映射)成近似椭圆;(c) 这些椭圆被切成合适的方形小片成为 $E$ 的覆盖,由此得到维数的更好的估计

$$4^{m-1}\alpha_1((f^k)'(x))\cdots\alpha_{m-1}((f^k)'(x))\alpha_m((f^k)'(x))^{-(m-1)} \qquad (12.8)$$

个的集覆盖这样的椭球。对 $0<s\leqslant r_0$，设 $\{U_i\}$ 是 $E$ 的 $\delta-$ 覆盖（如式(2.7)所定义），可以假定每个 $U_i$ 与 $E$ 都相交。则对每个 $i$，存在球心为 $x\in E$，半径为 $|U_i|$ 的球 $B_i$，使 $U_i\subset B_i$。对直径最多为 $|U_i|a\alpha_m((f^k)'(x))\leqslant\frac{1}{2}|U_i|\leqslant\frac{1}{2}\delta$（利用式(12.7)）的集 $\{U_{i,j}\}_j$，由式(12.8)，

$$f^k(E\cap U_i)\subset f^k(E\cap B_i)\subset\bigcup_j U_{i,j},$$

使得

$$\begin{aligned}\sum_j|U_{i,j}|^s&\leqslant 4^{m-1}\alpha_1((f^k)'(x))\cdots\alpha_{m-1}((f^k)'(x))\alpha_m((f^k)'(x))^{-(m-1)}\\&\quad\times(|U_i|a\alpha_m((f^k)'(x)))^s\\&=|U_i|^s4^{m-1}a^s\omega_s((f^k)'(x))\\&\leqslant 4^{m-1}a^s|U_i|^s\omega_s^k\leqslant|U_i|^s\end{aligned}$$

上面还用到了式(12.1)和(12.5)。于是

$$E=f^k(E)\subset\bigcup_i f^k(E\cap U_i)\subset\bigcup_{i,j}U_{i,j},$$

其中对任意 $i,j$，$\sum_{i,j}|U_{i,j}|^s\leqslant\sum_i|U_i|^s$ 和 $|U_{i,j}|\leqslant\frac{1}{2}\delta$。即得对任意的 $\delta<r_0$，$\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2}\delta}(E)\leqslant\mathcal{H}^s_\delta(E)$，这意味着 $\mathcal{H}^s(E)<\infty$，即 $\dim_H E\leqslant s$。 □

对 $\dim_H E$ 的估计，有一种解释方法，记 $\alpha_i\equiv\omega_i/\omega_{i-1}$，则至少在一种"合理的一致性"的情形下，$\alpha_i$ 反映了 $\alpha_i(f'(x))$ 的第 $i$ 个奇异值，通过 $\alpha_i$ 表示 $\omega_s=1$，则由定理 12.2，可以得到

$$\dim_H E\leqslant(m-1)+\left(\sum_{i=1}^{m-1}\log\alpha_i\right)/|\log\alpha_{m+1}| \qquad (12.9)$$

其中 $m$ 是使 $\sum_{i=1}^{m}\log\alpha_i<0$ 的最小整数。

定理 12.2 还可以有许多改进，例如把定理应用到 $f^k$，注意到 $f^k(E)=E$，类似的处理可以得到 $\dim_B E$ 的界。

尽管对 $\omega_s$ 的估计经常需要大量的计算和努力，定理 12.2 及其各种不同的变化形式已经被用来估计各种各样的动力系统及微分方程的吸引子的维数。在所有的日益增多的应用中，下面只给

出三个例子，来说明这种方法是如何应用的。

Hénon 吸引子

考虑 Hénon 映射 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，由下式给出：

$$f(x,y)=(y+1-ax^2,\ bx) \tag{12.10}$$

则对任意的$(x,y)$，$f$的雅可比行列式的值为 $b$，所以在整个 $\mathbb{R}^2$ 中，它都以常数因子 $b$ 压缩面积。Hénon 映射是在坐标变化的范围内，具有上述性质的最一般的二次映射，见 FG13.4 节。

一般选择 $a=1.4$ 和 $b=0.3$ 这样的值进行研究，$f$有吸引子 $E$，$E$ 的局部看起来象是康托集与一般线段的乘积集，见图 12.4，取 $X$ 为顶点是

$(1.32,0.133),(-1.33,0.42),(-1.06,-0.5)$ 和$(1.245,-0.14)$ 的四边形区域，可以直接验证 $f$ 将 $X$ 映射成自身，$f$的吸引子由 $E=\bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(X)$ 给出，$E$带有的精细结构是由于$f$的迭代过程中反复拉伸和折叠的结果。

记 $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$，$f$的导数 $f'(u)$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 可以表成矩阵：

$$f'(u)=\begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

在这种二维的情形里，$\omega_1$ 和 $\omega_2$ 是容易计算的，对 $a=1.4, b=0.3$ 及 $u=(x,y)\in X$，

$$\omega_1(f'(u))=\|f'(u)\|=|4a^2x^2+1+b^2|^{1/2}\leqslant 3.868$$

$$\omega_2(f'(u))=|\det f'(u)|=|-b|=0.3$$

于是，对 $1\leqslant s\leqslant 2$，利用式(12.1)

$$\omega_s(f'(u))=\omega_1(f'(u))^{2-s}\,\omega_2(f'(u))^{s-1}\leqslant 3.868^{2-s}\times 0.3^{s-1}$$

如果 $s=1.53$，上式右边小于1，因此，由定理12.2，$\dim_H E\leqslant 1.53$。

数值计算的结果表明 $\dim_H E\simeq 1.26$，上面的估计是合理的。它是由对任意的 $u\in X$，取最差的 $\omega_s(f'(u))$的值而导出的近似。

* 本节剩余的部分在第一次阅读时可以略过。

下面两个例子涉及到由微分方程定义的连续动力系统的吸引

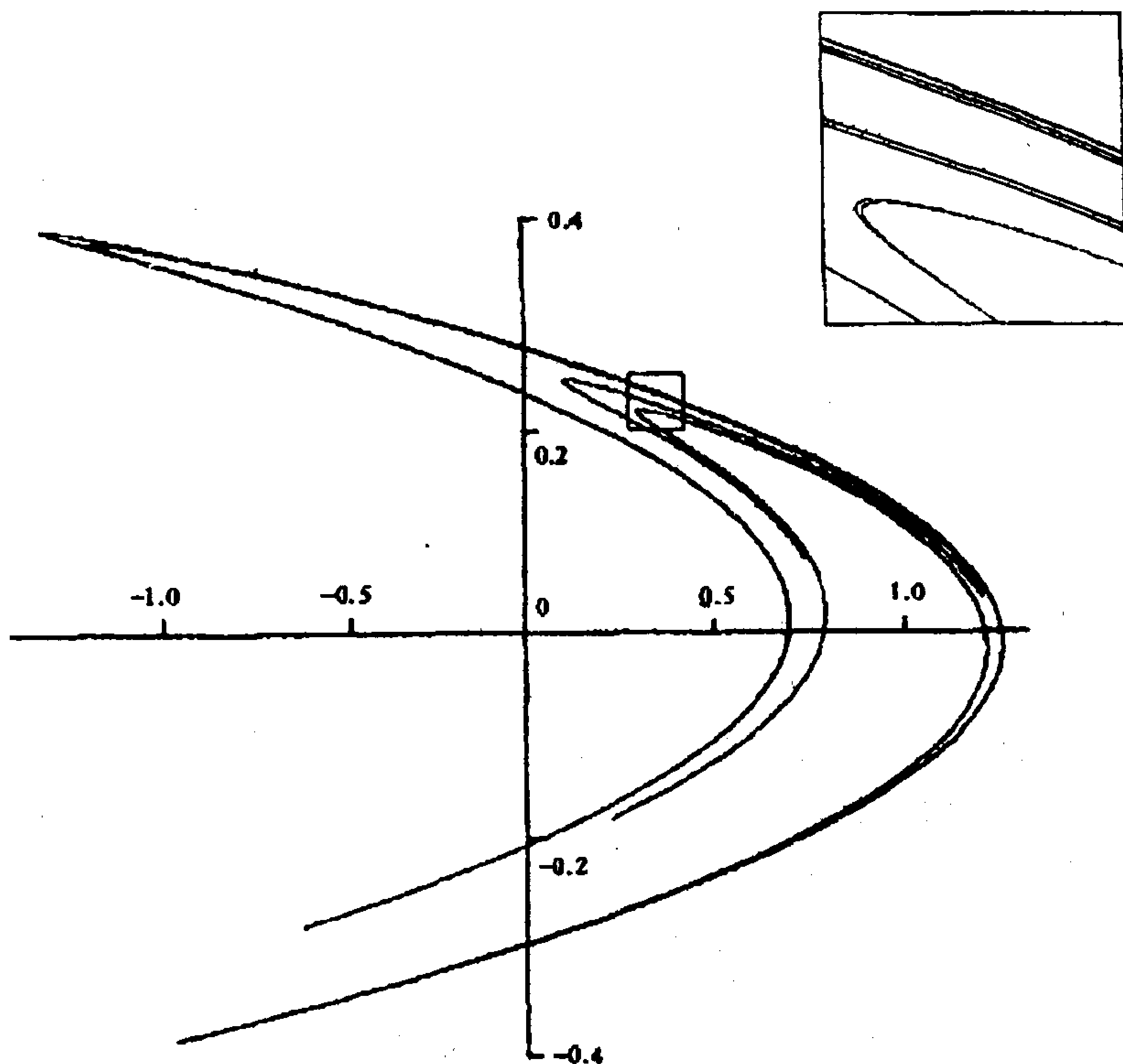



图 12.4 Hénon 吸引子．条状的分形结构显示在放大了的正方形中

子，需要一些更一般的理论来估计无穷小线段、无穷小平行四边形及无穷小平行六面体是如何在一些系统下演化的．

设 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是充分可微的，比如说是 $C^2$ 中的函数，考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的自治初始值问题

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)=g(u(t))\qquad(t\geqslant 0)\qquad(12.11)$$

$$u(0)=u_0 \tag{12.12}$$

于是 $u(t)\in\mathbb{R}^n$ 表示在此系统下运动的粒子在时刻 $t$ 的位置，在 0 时刻，这个质点处于 $u_0$ 。写成 $f_t(u_0)=u(t)$ 是有用的，此时，$f_t:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是确定的。这里，在时刻 $t$, $\mathbb{R}^n$ 中的每个点都在运动。把这种情况看成是在 $\mathbb{R}^n$ 上定义一个“流”$u_0\to f_t(u_0)$。在这里的应用中,$f_t$(对合适的 $t$)起到了前面的定理中 $f$ 的作用。在这个记号下，式(12.11)成为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_t(u_0)=g(f_t(u_0)) \tag{12.13}$$

在这样的流中，研究无穷小向量，或者更一般地，研究 $m$ 维体积元的演化。对 $t\geqslant 0$, $u_0\in\mathbb{R}^n$ 和 $\xi\in\mathbb{R}^n$，定义(根据充分可微性)

$$\xi(t)=f_t'(u_0)\xi \tag{12.14}$$

其中一撇表示对空间变量的导数，对小的 $\varepsilon$,

$$\varepsilon\xi(t)=f_t'(u_0)\varepsilon\xi\simeq f_t(u_0+\varepsilon\xi)-f_t(u_0)$$

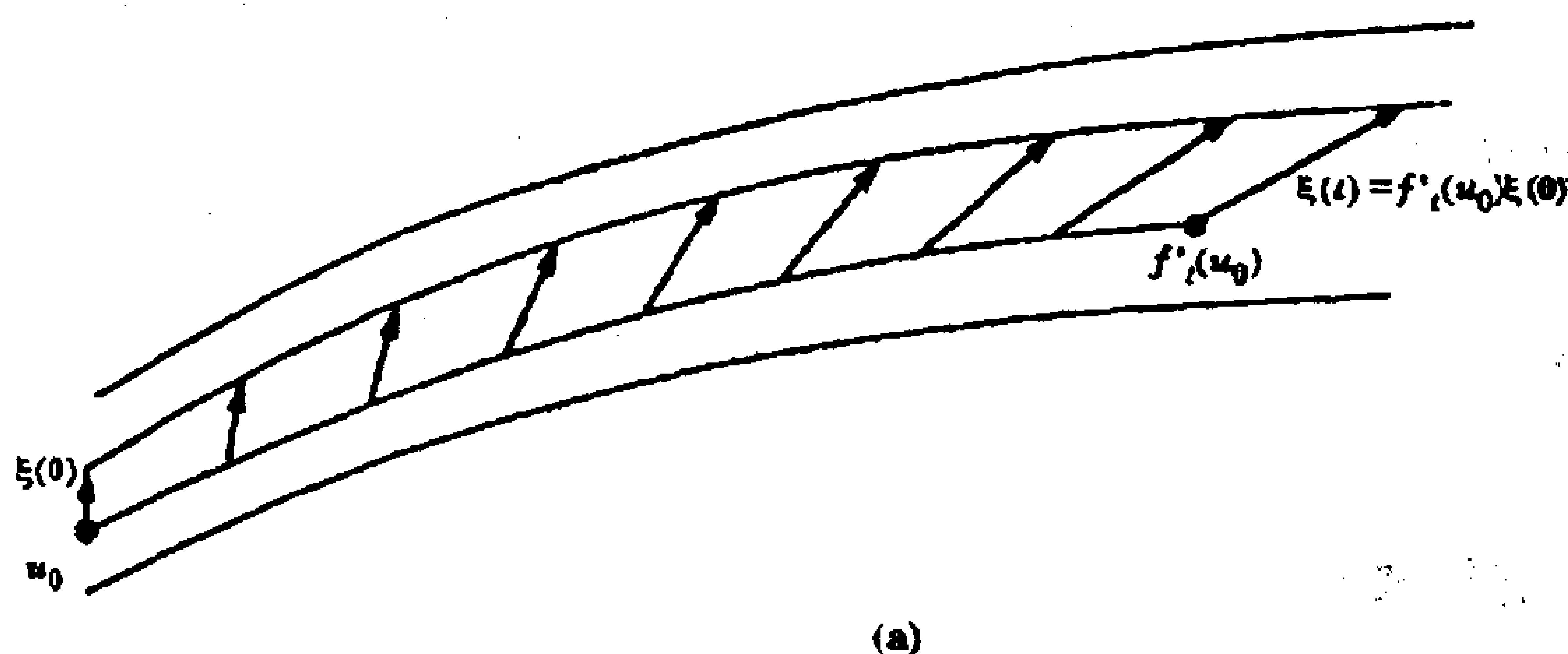
所以 $\xi(t)$ 可以看成在流 $f_t$ 的携带之下，初始时刻位于 $u_0$ 且从 $\xi=\xi(0)$ 开始的向量元的演化，见图 12.5($a$), 假定微分次序可以交换并利用式(12.13)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}(t)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f_t'(u_0)\xi)\\&=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_t(u_0)\xi\right)'\\&=(g(f_t(u_0))\xi)'\\&=g'(f_t(u_0))\circ f_t'(u_0)\xi\\&=g'(f_t(u_0))\xi(t)\end{aligned} \tag{12.15}$$

方程(12.15)称为系统的*第一变分方程*。

下面考虑无穷小 $m$ 维体积元的变化(图 12.5($b$))。对 $m$ 个向量 $\xi_1,\cdots,\xi_m\in\mathbb{R}^n$，记 $|\xi_1\wedge\xi_2\wedge\cdots\wedge\xi_m|$为由 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 定义的 $m$ 维平行六面体的 $m$ 维体积(利用这个符号是因为这个体积是外

积 $\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_n$ 的模，虽然本书的主要处理方法都尽量避免涉及外代数)。把 $\xi_1(t),\xi_2(t)\cdots$ 作为取 $\xi$ 分别为 $\xi_1(0)$、$\xi_2(0),\cdots$ 由式(12.14)得出的无穷小向量，则 $|\xi_1(t)\wedge\cdots\wedge\xi_m(t)|$ 是从初始时刻 $t=0$，位于 $u_0$ 的由 $\xi_1,\xi_2\cdots$张成的 $m$ 维无穷小平行六面体演化成的 $m$ 维无穷小平行六面体的 $m$ 维体积。现在，要把第一变分方程推广成关于 $|\xi_1(t)\wedge\cdots\wedge\xi_m(t)|$ 的微分方程 。



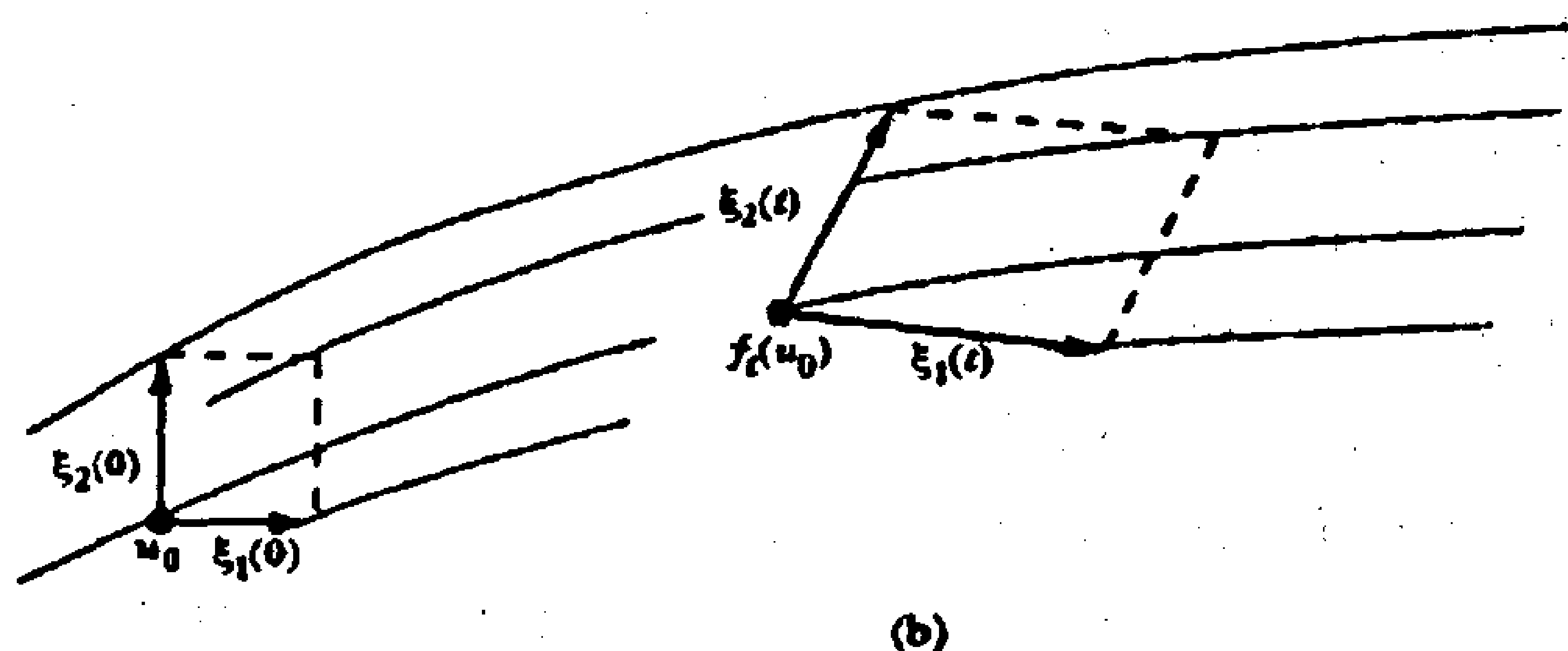




图 12.5　(a) 在流 $f_t$ 之下无穷小向量 $\xi=\xi(0)$ 的演化
(b) 在流 $f_t$ 之下无穷小矩形的演化

用 $<,>$ 表示通常的 $\mathbb{R}^n$ 上的数量积，回顾线性映射 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的迹是由

$$\mathrm{Tr}(L)=\sum_{i=1}^{n}<Le_i,e_i>$$

定义的，其中$(e_1,e_2\cdots)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的任一标准正交基 。这个定义是

不依赖于标准正交基的选择；并且如果 $L$ 表成关于标准正交基的矩阵，则 $\mathrm{Tr}(L)$ 是矩阵的主对角线元素之和。

**引理　12.3**

无穷小平行六面体的 $m$ 维体积的变化速率为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\xi_1(t)\wedge\cdots\wedge\xi_m(t)| = |\xi_1(t)\wedge\cdots\wedge\xi_m(t)|\mathrm{Tr}(g'(f_t u_0)\circ Q_m(t)) \quad (12.16)$$

其中 $Q_m(t)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是到 $\mathrm{span}\{\xi_1(t),\cdots,\xi_m(t)\}$*的垂直射影。于是对 $t \geqslant 0$

$$|\xi_1(t)\wedge\cdots\wedge\xi_m(t)| = |\xi_1(0)\wedge\cdots\wedge\xi_m(0)|\exp\int_0^t \mathrm{Tr}(g'(f_t u_0)\circ Q_m(\tau))d\tau \quad (12.17)$$

**证明梗概**

首先假定 $\xi_i \equiv \xi_i(t)$ $(i=1,\cdots,m)$ 是标准正交的(为简单起见，这里考虑了与 $t$ 无关的情形) 利用式(12.15)，在时间区间 $[t,t+\delta t]$，由无穷小向量 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 展成的立方体映射成由 $\xi_1+g'(f_t u_0)\xi_1\delta t$, $\cdots$, $\xi_m+g'(f_t u_0)\xi_m\delta t$ 展成的平行六面体。对立方体的 $m$ 维体积变化的第一部分是在 $\xi_i$ 的方向上，由每个 $\xi_i$ 增加的分量引起的。于是，对 $\delta t$ 部分，新的平行六面体的体积正好等于由

$$\xi_1(1+\langle g'(f_t u_0)\xi_1\delta t,\ \xi_1\rangle),\cdots,\xi_m(1+\langle g'(f_t u_0)\xi_m\delta t,\ \xi_m\rangle)$$

展成的长方体的体积，而这个体积恰好为：

$$1+\delta t\sum_{i=1}^{m}\langle g'(f_t u_0)\xi_i,\xi_i\rangle+O(\delta t^2)=1+\delta t\,\mathrm{Tr}(g'(f_t u_0)\circ Q_m)+O(\delta t^2)。$$

与初始的体积 $|\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_m|=1$ 比较，知道如果 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 是标准正交的，则式(12.16) 成立。

如果 $V$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 $m$ 维子空间，$L$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性映射，对任意

---

*: $\mathrm{span}\{\xi_1(t),\cdots,\xi_m(t)\}$ 表示为向量组 $\xi_1(t),\cdots\xi_m(t)$ 张成的子空间，下同。
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　— 译者注。

的 $V$ 中的区域 $A$，$L(A)$ 的 $m$ 维体积与 $A$ 的体积比值不变。因此，函数 $g$ 在由 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 定义的无穷小平行六面体的体积上的尺度效应只依赖于由 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 张成的空间，而不依赖于张成空间的向量的不同选择。这样，如果假设 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 是标准正交的并不会失去它的一般性，所以对一般情形，式(12.16) 也是成立的。

方程(12.16)是一阶线性常微分方程，该式积分就得到式(12.17)。 □

为了把它与奇异值函数联系起来，注意到对线性映射 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 和 $m=1,2\cdots$

$$\omega_m(L)=\sup_{\xi_1,\cdots,\xi_m\in B}|L(\xi_1)\wedge\cdots\wedge L(\xi_m)| \tag{12.18}$$

其中 $B$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球。这是因为当 $L(\xi_1),\cdots,L(\xi_m)$ 是 $L(B)$ 的 $m$ 个最长的主半轴时，由 $L(\xi_1),\cdots,L(\xi_m)$ 定义的平行六面体的 $m$ 维体积最大。

**命题 12.4**

在上面的符号下

$$\omega_m(f_t'(u_0))\leqslant\sup_{\xi_1,\cdots,\xi_m\in B}\exp\int_0^t\mathrm{Tr}(g'(f_\tau u_0)\circ Q_m(\tau))d\tau \tag{12.19}$$

其中 $Q_m(\tau)$ 是到 $\mathrm{span}\{\xi_1(\tau),\cdots,\xi_m(\tau)\}$ 的垂直射影。

**证明** 由式(12.18) 和式(12.14)

$$\begin{aligned}\omega_m(f_t'(u_0))&=\sup_{\xi_1,\cdots,\xi_m\in B}|f_t'(u_0)(\xi_1)\wedge\cdots\wedge f_t'(u_0)(\xi_m)|\\&=\sup_{\xi_1(0),\cdots,\xi_m(0)\in B}|\xi_1(t)\wedge\cdots\wedge\xi_m(t)|\end{aligned}$$

因为 $\sup_{\xi_1(0),\cdots,\xi_m(0)\in B}|\xi_1(0)\wedge\cdots\wedge\xi_m(0)|=1$，所以由式(12.17) 知式(12.19) 成立。 □

可利用命题12.4去估计$\omega_s$，再通过定理12.2给出许多微分方程吸引子维数的合理的上界。

### 洛伦兹吸引子

洛伦兹方程近似地描述了从下面加热时，二维平面层的液体形成圆筒形对流的状况(见FG13.5节)。通过选择合适的原点，这个方程可表成：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\sigma(y-x)\\ \dot{y}&=-\sigma x-y-xz\\ \dot{z}&=xy-bz-b(r+\sigma)\end{aligned}\tag{12,20}$$

这里$x$是圆柱的旋转速度，$y$是对应的圆柱里外两边的温差，$z$表示铅垂线方向的温度变化率，而变量上的点"·"表示对时间的导数。正常数$\sigma$，$b$和$r$分别表示液体的Prandtl数(它由液体的粘滞度及导热性决定)。液面的宽度与高度的比值，及系统的底部与顶部的温差，在这里取$\sigma>b+1$，洛伦兹指出，当

$$\sigma=10,\quad b=\frac{8}{3},\quad r=28\tag{12.21}$$

方程有一个带有两"翼"的混沌吸引子，轨道似乎是以一种随意的方式弹跳在两翼之间(见图12.6)

把$u=(x,y,z)$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$视为时间的函数，由式(12.20)，并利用$\sigma>1$及通常的二次表达式的最大估计，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2&=x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}\\ &=-\sigma x^2-y^2-bz^2-bz(r+\sigma)\\ &\leqslant-(x^2+y^2+z^2)-(b-1)z^2-bz(r+\sigma)\\ &\leqslant-|u|^2+\frac{b^2(r+\sigma)^2}{4(b-1)}\end{aligned}$$

因此$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u(t)|^2\mathrm{e}^{2t})\leqslant\frac{b^2(r+\sigma)^2}{2(b-1)}\mathrm{e}^{2t}$

两边同时积分，可得

$$|u(t)|^2 \leqslant |u(0)|^2 e^{-2t} + \frac{b^2(r+\sigma)^2}{4(b-1)}(1-e^{-2t})$$

特别

$$\limsup_{t\to\infty} |u(t)| \leqslant 2\rho_0 \tag{12.22}$$

其中
$$\rho_0 \equiv b(r+\sigma)/4(b-1)^{1/2}$$

于是，当 $t$ 充分大时，$u(t)$ 接近或者在球 $B(0,2\rho_0)$ 的内部，这意味着在解的轨道中，有一个(最大的)紧不变集 $E\subset B(0,2\rho_0)$，满足对所有的 $t\geqslant 0$，$f_tE=E$，而 $f_tu_0$ 是使 $u(0)=u_0$ 的解 $u(t)$。带有式(12.21)列出的参数值的集 $E$ 是如图 12.6 的洛伦兹吸引子。

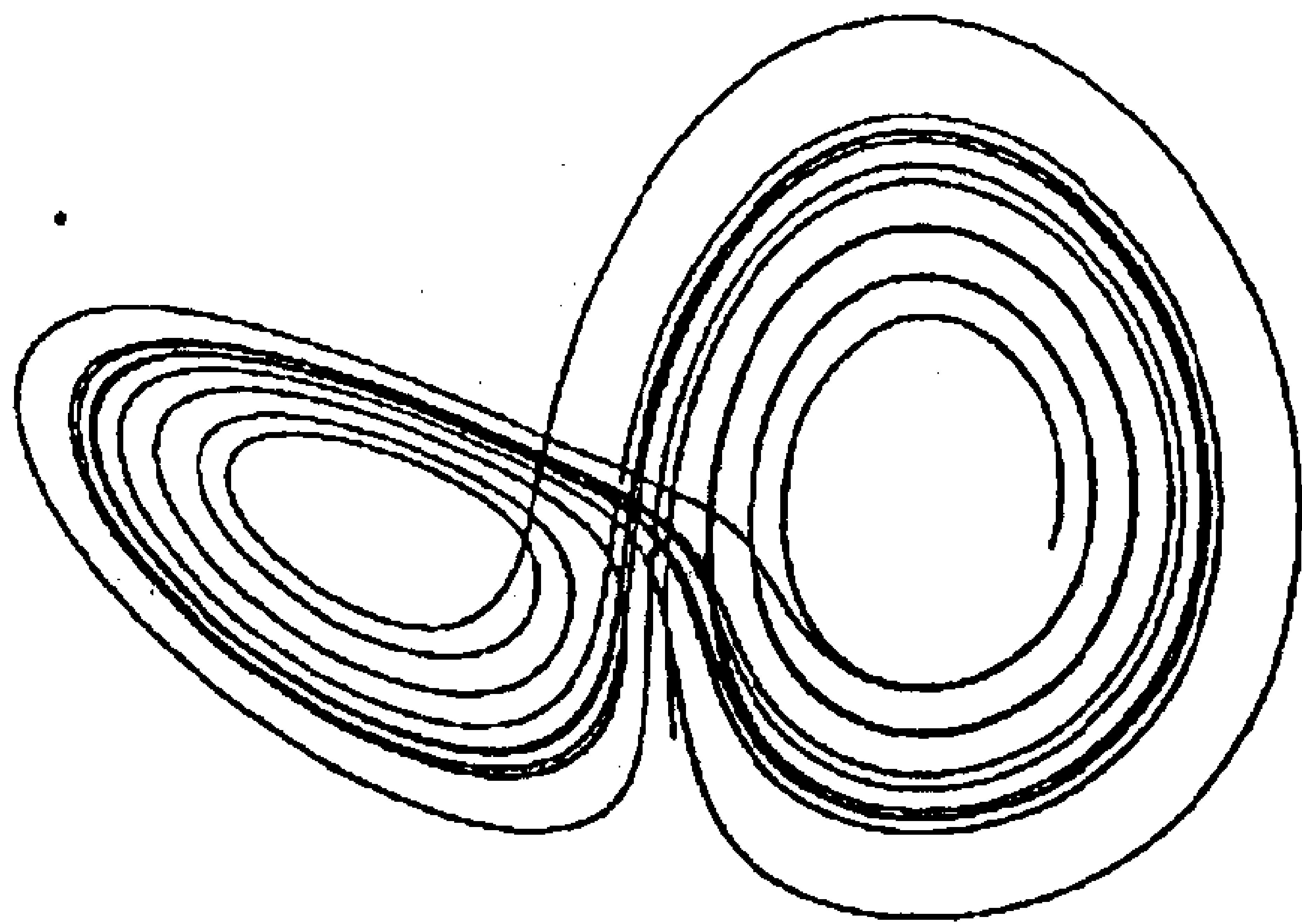


**图 12.6 $\sigma=10$, $b=8/3$ 及 $r=28$ 时的洛伦兹吸引子，螺旋形的轨道旋转成两"翼"并从一边"跳"到另一边**

可以利用命题 12.4 去估计 $t$ 较大时的 $\omega_2(f_tu_0)$ 和 $\omega_3(f_tu_0)$，进而应用定理 12.2，估计 $E$ 的维数。把式(12.20)视为 $\dot{u}=g(u)$，其中 $u=(x、y、z)$，则导数 $g'(u)$: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 可以表为矩阵：

$$g'(u)=\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -\sigma-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

于是，对任意的 $t$ 和 $u_0$，$\mathrm{Tr}(g'(f_t u_0)) = -(\sigma+b+1)$（表示的是常数值的压缩速率），而 $Q_3(t)$ 是恒等的，所以由式(12.19)

$$\omega_3(f_t'(u_0)) \leqslant \exp(-(\sigma+b+1)t) \tag{12.23}$$

为估计 $\omega_2$，把 $g'(u)$ 写成

$$g'(u) = L_1 + L_2 + L_3 \tag{12.24}$$

其中线性映射 $L_1$、$L_2$、$L_3$ 分别是

$$L_1 = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ -\sigma & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是，如果 $Q_2$ 表示在某个二维子空间的射影，则 $\mathrm{Tr}(L_1 \circ Q_2) \leqslant -b-1$（因为 $\sigma > b+1$）和 $\mathrm{Tr}(L_2 \circ Q_2) = 0$（因为反对称映射的迹为0）。对 $L_3$，设 $Q_2(t)$ 表示到 $\mathrm{span}\{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ 的垂直射影，而 $v_1, v_2, v_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基使得 $\mathrm{span}\{v_1, v_2\} = Q_2(t)(\mathbb{R}^3)$，记 $v_i = (x_i, y_i, z_i)$，因为 $(x_1, x_2, x_3)$，$(y_1, y_2, y_3)$ 和 $(z_1, z_2, z_3)$ 也是标准正交，则

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(L_3 \circ Q_2(t)) &= \langle L_3 v_1, v_1 \rangle + \langle L_3 v_2, v_2 \rangle \\ &= -z x_1 y_1 + y x_1 z_1 - z x_2 y_2 + y x_2 z_2 \\ &= z x_3 y_3 - y x_3 z_3 \end{aligned}$$

根据由算术－几何不等式而得出的哥西不等式

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(L_3 \circ Q_2(t)) &\leqslant |x_3|(y_3^2 + z_3^2)^{1/2}(z^2 + y^2)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{1}{2}(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2)(z^2 + y^2)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{1}{2}|u| \end{aligned}$$

利用式(12.22)，对给定的 $\delta > 0$，如果 $t$ 充分大

$$\mathrm{Tr}(L_3 \circ Q_2(t)) \leqslant \rho_0 + \frac{1}{2}\delta$$

于是对这样的 $t$，分解式(12.24)给出

$$\mathrm{Tr}(g'(f_t(u_0)) \circ Q_2(t)) \leqslant -b-1+\rho_0+\frac{1}{2}\delta$$

所以由式(12.19)，对充分大的 $t$，倘若 $-b-1+\rho_0>0$，则：

$$\omega_2(f_t'(u_0)) \leqslant \exp((-b-1+\rho_0+\delta)t) \tag{12.25}$$

由式(12.1)，(12.23) 和(12.25)，对任意 $u_0 \in E$ 及充分大的 $t$，如果 $2 \leqslant s \leqslant 3$，则

$$\begin{aligned}\omega_s(f_t'(u_0)) &= \omega_2(f_t'(u_0))^{3-s}\omega_3(f_t'(u_0))^{s-2} \\ &\leqslant \exp((3-s)(-b-1+\rho_0+\delta)t-(s-2)(\sigma+b+1)t) \\ &\leqslant \exp((s-2)(-\rho_0-\sigma-\delta)+(\rho_0-b-1+\delta))t\ 。\end{aligned}$$

于是，如果 $(s-2)<(\rho_0-b-1)/(\rho_0+\sigma)$，可以看出，当选择的 $\delta$ 充分小，则对充分大的 $t$，$\omega_s=\sup_{u_0\in E}\omega_s(f_t'(u_0))<1$，由定理 12.2，

$$\dim_H E \leqslant 2+(\rho_0-b-1)/(\rho_0+\sigma) \tag{12.26}$$

其中 $\rho_0=b(r+\sigma)/4(b-1)^{1/2}$ 。

代入对洛伦兹吸引子通常用的参数值(12.21)，可得

$$\dim_H E \leqslant 2.539\ 。$$

可以改进以上的计算并得出更好的估计，精确的数值计算表明真正的维数大约等于 2.05。

类似的方法也可以用来研究某些其他微分方程的自治系统的空间吸引子。

这个基本的方法可以推广，用来估计某些空间－时间变量的偏微分方程的函数吸引子的维数。此时，把对 $x\in D\subset\mathbb{R}^n$ 及 $t>0$ 的方程的解 $u(x,t)$ 看成是 $\mathbb{R}^n$ 的函数空间中的一个点 $u(\cdot,t)$，然后去求这样的解在 $t\to\infty$ 时的极限点所组成的函数集合的维数。下面所示的是把这种方法应用在简单非线性偏微分方程的情形。

### 反应扩散方程

设 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有光滑边界 $\partial D$ 的有界开区域，$p$ 是首项系数

为正数的奇数阶多项式，固定 $\varepsilon>0$，考虑反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon\nabla^2 u+p(u)=0 \quad x\in D,\ t\geqslant 0 \tag{12.27}$$

的解 $u(x,t)$，这个方程的边界条件是：

$$u(x,t)=0\ ,\quad x\in\partial D\ ,\ t\geqslant 0 \tag{12.28}$$

初始条件是：

$$u(x,0)=u_0(x) \qquad x\in D \tag{12.29}$$

方程(12.27)是众所周知的 Allen－cahn 方程，并已应用在相变模型中。为把上面阐述的方法应用到这个方程的解上，用具有普通内积 $\langle v_1, v_2\rangle=\int_D v_1(x)\,v_2(x)\,dx$ 的 $D$ 上的二次可积函数空间——希尔伯特空间 $H$ 取代 $\mathbb{R}^n$，把方程(12.27)－(12.29)解的时间演化看成是 $H$ 中的流。于是，记 $f_t(u_0)$ 为方程在 $t$ 时刻的解 $u(\cdot,t)$，并把它看成是相应于初始条件 $u(\cdot,0)=u_0$ 的 $H$ 中的一个点。在这样的记号下，方程(12.27)可以写成式(12.11)的形式：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)&=g(u(\cdot,t))\\ g(u)&=\varepsilon\nabla^2 u-p(u)\end{aligned} \tag{12.30}$$

其中 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ 是变量为 $t$，取值在希尔伯特空间的函数的 Fréchet 导数。

可以证明，对每个 $u_0\in H$，问题(12.27)－(12.29)有满足 $f_t(u_0)=u(\cdot,t)\in H$，且对 $x$ 和 $t$ 连续的唯一解 $u(x,t)$。并且 $u(\cdot,t)\in H^1$，这里 $H^1$ 是具有在 $H$ 内的导数的 Fréchet 可微函数空间。

也可以证明系统(12.27)－(12.29)有最大的吸引子 $E$，$E$ 是对任意 $t>0$，使 $f_t(E)=E$ 的 $H$ 的紧子集，且对任意 $u_0\in H$，满足当 $t\to\infty$ 时，希尔伯特空间距离 $\mathrm{dist}(f_t(u_0),E)\to 0$ 。

$E$ 的维数可以用类似于在洛伦兹吸引子中用过的方法进行估计。下面我们在无穷维空间 $H$ 上处理这个问题，然而可以采用在有限维空间中同样的方法，对 $s>0$，定义 $H$ 中的线性算子 $L$ 的奇异值与奇异值函数 $\omega_s(L)$。而且，定理 12.2 仍然成立，这只需对

证明进行很小的修改。与前面做的一样,为得到 $\xi(t)=f_t'(u_0)\xi\in H$ 的第一变分方程,可以考察无穷小向量的演化情况,在这种情形下,这个方程是:

对 $t>0$, $\xi\in H$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=g'(f_t(u_0))\xi(t)=\varepsilon\nabla^2\xi-p'(f_t(u_0))\xi \tag{12.31}$$

$$\text{且在 } \partial D \text{ 上}, \xi(t)=0; \text{ 在 } D \text{ 上}, \xi(0)=\xi \tag{12.32}$$

(这个正式的论断需要在适当的函数空间进行论证。)

利用第一变分方程可以考察由 $\xi_1(t),\cdots,\xi_m(t)$ 张成的无穷小(超)平行六面体的演化,其中 $\xi_i(t)$ 是由 $\xi_i(0)=\xi\in H$ 变化而得的无穷小向量。定义希尔伯特空间中的 $m$ 维体积及定义 $m$ 维超平行六面体是没任何问题的,并且此时引理 12.3 及命题 12.4 与有限维情形一样也是成立的。

为把命题 12.4 应用到希尔伯特空间情形,我们估计 $\mathrm{Tr}(g'(f_t(u_0)\circ Q_m(t))$,其中 $Q_m(t)$ 表示在空间 $\mathrm{span}\{\xi_1(t),\cdots,\xi_m(t)\}$ 上的垂直射影。固定时间 $t$,设 $v_1,v_2\cdots$ 是 $H$ 的标准正交基,且满足 $\mathrm{span}\{v_1,\cdots,v_m\}=\mathrm{span}\{\xi_1(t),\cdots,\xi_m(t)\}=\mathrm{span}Q_m(t)H$。因为对 $t>0$ 和任意 $j$,$\xi_j(t)\in H^1$,所以对任意 $j$,$v_j\in H^1$。则

$$Q_m(t)v_j=\begin{cases}v_j & \text{如果 } j\leqslant m\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

所以,对 $j\leqslant m$,利用式(12.31)

$$\begin{aligned}<g'(f_t(u_0))\circ Q_m(t)v_j,\ v_j> &= <g'(f_t(u_0))v_j,\ v_j>\\ &=\varepsilon<\nabla^2 v_j,\ v_j> - <p'(f_t(u_0))v_j,\ v_j>\\ &=\varepsilon<\nabla^2 v_j,\ v_j> - \int_D p'(f_t(u_0))v_j^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为 $p$ 是首项系数为正的奇数阶多项式,所以存在仅依赖于 $p$ 的数 $\kappa\geqslant 0$,使对任意 $s\in\mathbb{R}$,$p'(s)\geqslant-\kappa$。于是,由 $v_i$ 的标准正交性,

$$\int_D v_j^2 \mathrm{d}x = 1, \text{所以}$$

$$< g'(f_t(u_0)) \circ Q_m(t) v_j, v_j > \leqslant \varepsilon < \nabla^2 v_j, v_j > + \kappa$$

因此

$$\mathrm{Tr}(g'(f_t(u_0)) \circ Q_m(t)) = \sum_{j=1}^{m} < g'(f_t(u_0)) \circ Q_m(t) v_j, v_j >$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{m} < \nabla^2 v_j, v_j > + \kappa m \tag{12.33}$$

设 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ 是 $D$ 上的狄利克莱问题的 $-\nabla^2$ 的特征值(即 $\nabla^2 u + \lambda u = 0$, 且在 $\partial D$ 上，$u = 0$)，则对任意标准正交向量序列 $v_1, v_2, \cdots \in H$,

$$-\sum_{j=1}^{m} < \nabla^2 v_j, v_j > \geqslant \lambda_1 + \cdots \lambda_m \tag{12.34}$$

(这个不等式的确定是由于

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \mapsto (-\nabla^2 v_1) \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m + \cdots + v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge (-\nabla^2 v_m)$$

是到 $H$ 的 $m$ 重外积上的(无界)自伴随变换，它以 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ 为它的最小特征值)。由 Weyl 定理(见式(12.40)), 特征值的渐近分布是 $\lambda_j \sim c_0 \mathcal{L}^n(D)^{-2/n} j^{2/n}$，所以由求和知 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m \geqslant c_1 \mathcal{L}^n(D)^{-2/n} m^{1+2/n}$, 其中 $c_0$ 和 $c_1$ 只依赖于 $n$, $\mathcal{L}^n(D)$ 是 $D$ 上的 $n$ 维勒贝格测度。于是，由式(12.33) 和(12.34)

$$\mathrm{Tr}(g'(f_t(u_0)) \circ Q_m(t)) \leqslant -c_1 \varepsilon \mathcal{L}^n(D)^{-2/n} m^{1+2/n} + \kappa m \tag{12.35}$$

可以选择整数 $m$ 使上式的右边是负数，比如说小于 $-\delta$, 则由式(12.19)

$$\omega_m(f_t'(u_0)) \leqslant \mathrm{e}^{-\delta t}$$

再由在所设的希尔伯特空间中仍然成立的定理 12.2 知，$\dim_{\mathrm{H}} E \leqslant m$, 这里 $E$ 是系统的函数吸引子，让式(12.35) 的右边等于 0, 得

$$\dim_{\mathrm{H}} E \leqslant 1 + c\varepsilon^{-n/2} k^{n/2} \mathcal{L}^n(D) \tag{12.36}$$

其中 $c = c_1^{-n/2}$ 只依赖于 $n$ 和 $D$ 的形态(事实上，可以通过对 $\nabla^2$ 的特征值的分布的细致分析，而相当准确地选出 $c$ 值)。不等式(12.36) 清楚地表明函数吸引子的维数取决于 $D$ 的体积，偏微分方程(12.27) 中的常数 $\varepsilon$ 及常数 $\kappa$, 而 $\kappa$ 值很显然是由多项式 $P$ 决定的。

许多其他微分方程的函数吸引子的维数都可以用本节概略描述的方法的推广进行研究，例如 Navier－Stokes 方程，模式系统方程以及Schrödinger 方程等。函数吸引子描述了系统从函数空间的任何点开始最后能被观察到的不变的状态。它的维数标示了流的复杂的程度,并且可以看成是用来描述所讨论的现象中间隙程度的一个数据。

## 12.2　带有分形边界区域的拉普拉斯特征值

设 $D\subset\mathbb{R}^n(n\geqslant 1)$ 是以 $\partial D$ 为边界的有界开区域(并不一定要求 $D$ 是连通的)。考虑带有狄利克莱边界条件

$$u(x)=0 \qquad x\in\partial D \tag{12.37}$$

的 $D$ 上的特征值问题

$$\nabla^2 u=-\lambda u \tag{12.38}$$

(实)特征值 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$，是指使得方程(12.38)有非平凡解的那些 $\lambda$。这些特征值可以看成是覆盖在区域 $D$ 上的($n$ 维)薄膜的振动主频率 。

定义特征值计数函数：

$$N(\lambda)=\#\{k:\ \lambda_k\leqslant\lambda\} \tag{12.39}$$

令人感兴趣的问题是对较大的 $\lambda$, $N(\lambda)$ 的性状，尤其是它如何反映出 $D$ 的边界的性质。Weyl 阐述的经典结果是：如果 $\partial D$ 是充分光滑的，则当 $n\to\infty$ 时

$$N(\lambda)\sim c_n\mathcal{L}^n(D)\lambda^{n/2} \tag{12.40}$$

其中 $c_n=(2\pi)^{-n}\mathcal{L}^n(B)$, $B$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球，$\mathcal{L}^n$ 表示 $n$ 维体积。而且，如果边界 $\partial D$ 是充分光滑的，则

$$N(\lambda)=c_n\mathcal{L}^n(D)\lambda^{n/2}+b_n\mathcal{L}^{n-1}(\partial D)\lambda^{\frac{n-1}{2}}+o(\lambda^{\frac{n-1}{2}}) \tag{12.41}$$

其中 $b_n$ 是仅依赖于 $n$ 的常数。于是，$\partial D$ 的“曲面面积”决定了 $N(\lambda)$ 的渐近展式的第二项；并且指数$(n-1)/2$ 是(光滑)边界维数的一半。

下面对带有分形边界的区域去寻求类似于式(12.41)的表示。特别地，"可不可以听出分形的维数？"即可不可以由特征值的信息去发现 $\partial D$ 的维数？其实，在这里除了可以说明边界的维数与 $N(\lambda)$ 的展开式的第二项经常有联系以外，几乎不能再多做些什么。

先考虑问题(12.37)－(12.38)的一维版本，因为区域是不连通的，所以这个问题也不是那么显然的，但因为可以把 $N(\lambda)$ 表示成确定的形式，所以问题也还是比较容易处理的。利用3.2节的记号，设 $A\subset\mathbb{R}$ 是有界闭区间，$A_1, A_2\cdots$ 是按长度下降次序排列的开子区间序列，满足

$$|A|=\sum_{i=1}^{\infty}|A_i| \tag{12.42}$$

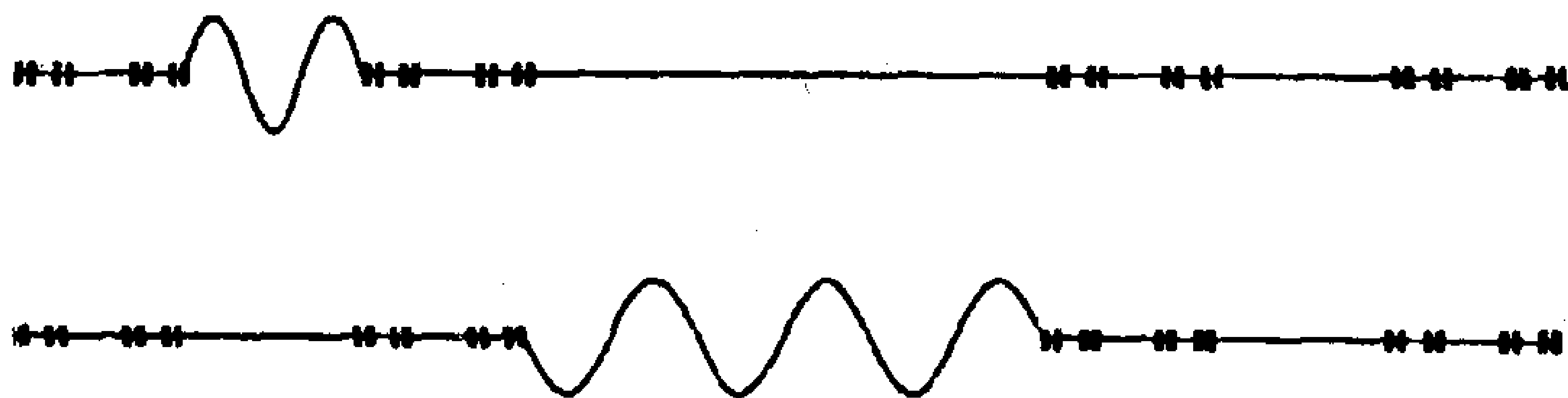


图2.7　在康托集的补集上的两个拉普拉斯特征函数．它们可以看成是穿过康托集的弦的共振

下面在区域 $D=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 上考虑问题，这是边界为

$$\partial D=A\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \tag{12.43}$$

的"剪切集"，已经在命题3.6中研究了 $\partial D$ 的盒维数．$D$ 上的特征值问题可以看成是寻找弦的共振频率问题，这些弦穿过集 $A$ 而固定在 $\partial D$ 的点上，这样每个子区间 $A_i$ 上的弦可以独立振动。寻找在 $D$ 上

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\lambda u\ ,\quad 而在\partial D 上\ u(x)=0 \tag{12.44}$$

的方程的解。非平凡的解只发生在每个 $A_i$ 区间的共振频率

$\lambda=(\pi k/|A_i|)^2$ $(k=1,2,\cdots)$上，式(12.44)有频率为 $\pi k/|A_i|$ 且离开 $A_i$ 就为0的正弦解(图12.7)。利用式(12.42)，计算所有 $A_i$ 区间的这些特征值，可得

$$\begin{aligned}N(\lambda)&=\sum_{i=1}^{\infty}\#(k:(\pi k/|A_i|)^2\leqslant\lambda)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\lfloor\pi^{-1}\lambda^{1/2}|A_i|\rfloor\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\pi^{-1}\lambda^{1/2}|A_i|-\sum_{i=1}^{\infty}\{\pi^{-1}\lambda^{1/2}|A_i|\}\\&=\pi^{-1}\mathcal{L}^1(D)\lambda^{1/2}-\psi(\lambda)\end{aligned}\tag{12.45}$$

其中

$$\psi(\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\{\pi^{-1}\lambda^{1/2}|A_i|\}\tag{12.46}$$

(这里用⌊ ⌋表示“整数部分”，{}表示分数部分)式(12.45)的第一项正好是 $n=1$ 时的Weyl表达式(12.40)；下面证明在一定的条件下，余项 $\psi(\lambda)$ 是 $\lambda^{s/2}$ 阶的 。

**命题** 12.5

设 $D=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\subset\mathbb{R}$ 按上面方法构造，令

$$N(\lambda)=\pi^{-1}\mathcal{L}^1(D)\lambda^{1/2}-\psi(\lambda)\tag{12.47}$$

则 (a)如果存在 $0<s<1$ 使 $|A_i|\asymp i^{-1/s}$，则当 $\lambda\to\infty$ 时，$\psi(\lambda)\asymp\lambda^{s/2}$。

(b)如果 $\underline{\dim}_B\partial D=\overline{\dim}_B\partial D=s$，其中 $0<s<1$ 则 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\log\psi(\lambda)/\log\lambda=s/2$。

**证明** 给定 $\lambda>\pi^2|A_1|^{-2}$，设 $k$ 是使 $\pi^{-1}\lambda^{1/2}|A_k|\geqslant1$ 的最大整数，由(a)中的假设知，存在与 $\lambda$ 无关的 $c>0$，使

$$c^{-1}\lambda^{s/2}\leqslant k\leqslant c\lambda^{s/2}\tag{12.48}$$

利用式(12.46)

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}\pi^{-1}\lambda^{1/2}|A_i|\leqslant\psi(\lambda)\leqslant k+\sum_{i=k+1}^{\infty}\pi^{-1}\lambda^{1/2}|A_i|$$

于是存在 $c_1>0$ 使

$$c_1^{-1}\lambda^{1/2}\sum_{i=k+1}^{\infty}i^{-1/s}\leqslant\psi(\lambda)\leqslant k+c_1\lambda^{1/2}\sum_{i=k+1}^{\infty}i^{-1/s},$$

因此存在 $c_2>0$ 使

$$c_2^{-1}\lambda^{1/2}k^{1-1/s}\leqslant\psi(\lambda)\leqslant k+c_2\lambda^{1/2}k^{1-1/s}$$

利用“积分试验估计”知 $\sum_{i=k+1}^{\infty}i^{-1/s}\asymp k^{1-1/s}$，结合式(12.48)即得 $\psi(\lambda)\asymp\lambda^{s/2}$。

(b)　由系3.8，条件 $\dim_B\partial D=s$ 意味着 $\lim\limits_{i\to\infty}\log|A_i|/\log i=-1/s$，所以对任意 $\varepsilon>0$，对充分大的 $i$，

$$i^{-\varepsilon-1/s}\leqslant|A_i|\leqslant i^{\varepsilon-1/s}$$

用与证明(a)同样的程序，可以证明，只要 $\lambda$ 充分大，

$$\lambda^{s(1-\varepsilon)/2}\leqslant\psi(\lambda)\leqslant\lambda^{s(1+\varepsilon)/2}$$

□

由此可以看出，对 ℝ 中高度不连通的区域，$N(\lambda)$ 表达式的第二项确实依赖于边界的盒维数。

上述论断可以进一步发展，例如，如果命题12.5的条件(a)加强为 $|A_i|\sim ci^{-1/s}$，则可以利用数论方法对(12.46)的和式进行估计，而得到：

$$\psi(\lambda)=\pi^{-s}c^s\zeta(s)\lambda^{s/2}+o(\lambda^{s/2})\tag{12.49}$$

其中 $\zeta$ 是黎曼 $\zeta$－函数。而对自相似集则可以结合第7章的更新定理的估计法而得出。设 $\partial D$ 是从[0,1]区间构造出来的维数为 $s$ 的自相似集，其构造的第一步是由长度为 $r_1,\cdots,r_m$，间隔分别为 $b_1,\cdots,b_{m-1}$ 的 $m$ 个区间组成。倘若 $\{\log r_1^{-1},\cdots,\log r_m^{-1}\}$ 是非算术集，利用系7.3(见练习12.5)可以证明

$$|A_i|\sim i^{-1/s}s^{-1/s}\left(\sum_{i=1}^{m-1}b_i^s/\sum_{i=1}^{m}r_i^s\log r_i^{-1}\right)^{1/s}\tag{12.50}$$

其中 $A_i$ 是 $\partial D$ 中第 $i$ 个最长的间隙，所以

$$\psi(\lambda)=\pi^{-s}s^{-1}\zeta(s)\left(\sum_{i=1}^{m-1} b_i^s\Big/\sum_{i=1}^{m} r_i^s \log r_i^{-1}\right)\lambda^{s/2}+o(\lambda^{s/2}) \qquad (12.51)$$

在算术的情形，$\psi(\lambda)=\lambda^{s/2}p(\log\lambda)+o(\lambda^{s/2})$，其中 $p$ 是周期函数 。

对平面区域 $D$，在 $\lambda$ 充分大时，成立 Weyl 估计 $N(\lambda)\sim \frac{1}{4}\pi^{-1}\mathcal{L}^2(D)\lambda$，同时也可以期望展开式的第二项再次反映了 $\partial D$ 的分形性质。然而在平面上问题要复杂得多，因为平面上的一般区域，不能象一维情形一样分解成可以看成彼此无关的部分。不过在这方面已有一些进展，在 $\mathbb{R}^n$ 中的某些有界区域 $D$ 上，式(12.37)－(12.38)的特征值的渐近状况已由下式与 $\partial D$ 上的内闵可夫斯基维数联系在一起：

$$\dim_1\partial D=n-\lim_{r\to 0}\log\mathcal{L}^n(E_r)/\log r \qquad (12.52)$$

假定上面的极限存在，其中 $E_r$ 是由下式定义的 $\partial D$ 内 $r$－邻域

$$E_r=\{x\in D:\ \mathrm{dist}(x,\partial D))\leqslant r\} \qquad (12.53)$$

见图 12.8。(内闵可夫斯基维数可以看成是“单边盒维数”，请与式(2.4)－(2.6)比较。)

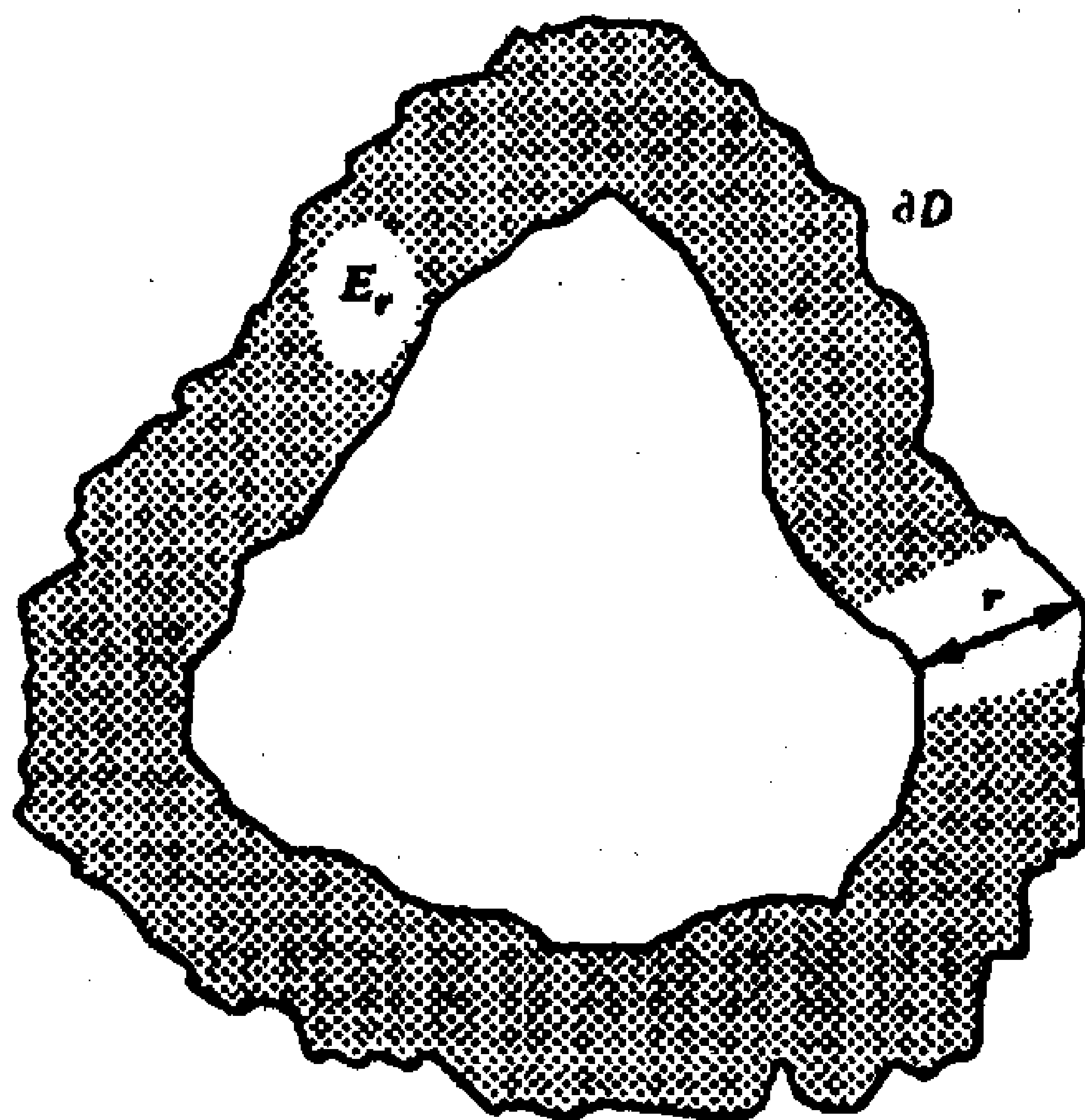



图 12.8 $\partial D$ 的内 $r$-邻域 $E_r$

大部分平面区域特征值计数函数的估计都基于直接的计算，这在正方形区域是可行的。对边为$a$的正方形区域$D$上的问题：在$D$上

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\lambda u;\text{在}\ \partial D\ \text{上},\ u(x,y)=0, \tag{12.54}$$

对$k$, $m\in\mathbb{Z}^+$，这个问题的特征值$\lambda=\pi^2(k^2+m^2)/a^2$，相应的特征函数具有 $u(x,y)=\sin(k\pi x/a)\ \sin(m\pi y/a)$ 的形式 。于是，对边为$a$的正方形，

$$N(\lambda)=\#\{(k,m)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+:\ k^2+m^2\leqslant a^2\pi^{-2}\lambda\}$$

即在$Q(0,a\pi^{-1}\lambda^{1/2})$内整数坐标的格子点个数，$Q(0,r)$表示中心在原点，半径为$r$的严格正的四分之一圆，易见对任意$r>0$，

$$\#\{Q(0,r)\ \text{内的格子点}\}=0,\ \text{如果}\ r<1, \tag{12.55}$$

和

$$0\leqslant Q(0,r)\ \text{的面积}-\#\{Q(0,r)\ \text{内的格子点}\}\leqslant 2r \tag{12.56}$$

见练习 12.3 ．于是对边为$a$的正方形，

$$N(\lambda)=\frac{1}{4}\ a^2\pi^{-1}\lambda-\psi(\lambda) \tag{12.57}$$

这里

$$0\leqslant\psi(\lambda)\leqslant 2a\pi^{-1}\lambda^{1/2} \tag{12.58}$$

而对

$$\lambda<\pi^2a^{-2},\quad \psi(\lambda)=\frac{1}{4}\ a^2\pi^{-1}\lambda \tag{12.59}$$

（所以对$\lambda<\pi^2a^{-2}$, $N(\lambda)=0$ ）。

对分形区域的特征值计数函数的估计，是通过对无穷多的相互不交的正方形系列，利用与命题 12.5 同样的方法得到的。例如，设$A_i$是边长为$a_i$的开正方形，这里$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots$，并设$D=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$是不交并，且$D$是有界的。如果$a_i\asymp i^{-1/s}$，$1<s<2$，则$\dim_1\partial D=s$，利用与证明命题 12.5 相同的程序，但是利用式(12.57)－(12.59)，可得

$$N(\lambda)=\frac{1}{4}\ \pi^{-1}\mathcal{L}^2(D)\lambda-\psi(\lambda) \tag{12.60}$$

其中 $\psi(\lambda) \asymp \lambda^{s/2}$ 。如果对 $Q(0,r)$ 中的格子点数进行更精细的估计，则可以找到相当接近 $\psi(\lambda)$ 的估计。而且，如果正方形 $A_i$ 的排列是紧靠在一起，相邻两正方形的小间隙的宽度急速下降，则上述的估计可以延拓到某些连通域 $D$ 。

可以将这种思想推广到更一般的区域上而找出 $N(\lambda)$ 的下界。定义平面区域的边界 $\partial D$ 的上内闵可夫斯基维数 。

$$\overline{\dim}_{i}\partial D = 2 - \liminf_{r \to 0} \log \mathcal{L}^2(E_r)/\log r \tag{12.61}$$

其中 $E_r$ 是 $\partial D$ 的内 $r-$ 邻域。

**命题 12.6**

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界区域，$s = \overline{\dim}_{i}\partial D$ ，则对给定的 $\varepsilon > 0$,

$$N(\lambda) - \frac{1}{4}\pi^{-1}\mathcal{L}^2(D)\lambda \geqslant -\lambda^{s/2+\varepsilon} \tag{12.62}$$

对充分大的 $\lambda$ 成立 。

**证明** 称$m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$的正方形$(m_1 2^{-k}, (m_1+1)2^{-k}) \times (m_2 2^{-k}, (m_2+1)2^{-k})$为边长等于 $2^{-k}$ 的(开)二元正方形。对 $D$ 进行如下的 Whitney 分解，使之成为一些二元正方形。设 $S_1$ 是包含在 $D$ 内的边长为 $2^{-1}$ 的二元正方形之并，$S_2$ 是包含在$D \backslash \overline{S}_1$的边长为 $2^{-2}$ 的二元正方形之并。以此类推，$S_k$ 是包含在 $D \backslash \bigcup_{i=1}^{k-1}\overline{S}_i$ 的边长为 $2^{-k}$ 的二元正方形之并。于是正方形的并 $\bigcup_{i=1}^{k}\overline{S}_i$ 是从内部很好地逼近 $D$ 的增序列，且$\overline{D} = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i}$ ，见图 12.9 。

对 $k \geqslant 2$, $S_k$ 的每个正方形一定会包含在内邻域 $E_{2^{-k}(1+\sqrt{2})}$内，这是因为如果 $S_k$ 的任一个正方形不在 $E_{2^{-k}(1+\sqrt{2})}$ 内，则它必然包含在某个使 $i<k$ 的 $S_i$ 内，这与定义矛盾。于是，如果 $n_k$ 是 $S_k$ 中的正方形的个数，利用面积的关系，对充分大的 $k$, 由式(12.61)

$$n_k 2^{-2k} \leqslant \mathcal{L}^2(E_{2^{-k}(1+\sqrt{2})}) \leqslant 2^{-k(2-s-\varepsilon)}$$

所以

$$n_k \leqslant 2^{k(s+\varepsilon)} \tag{12.63}$$

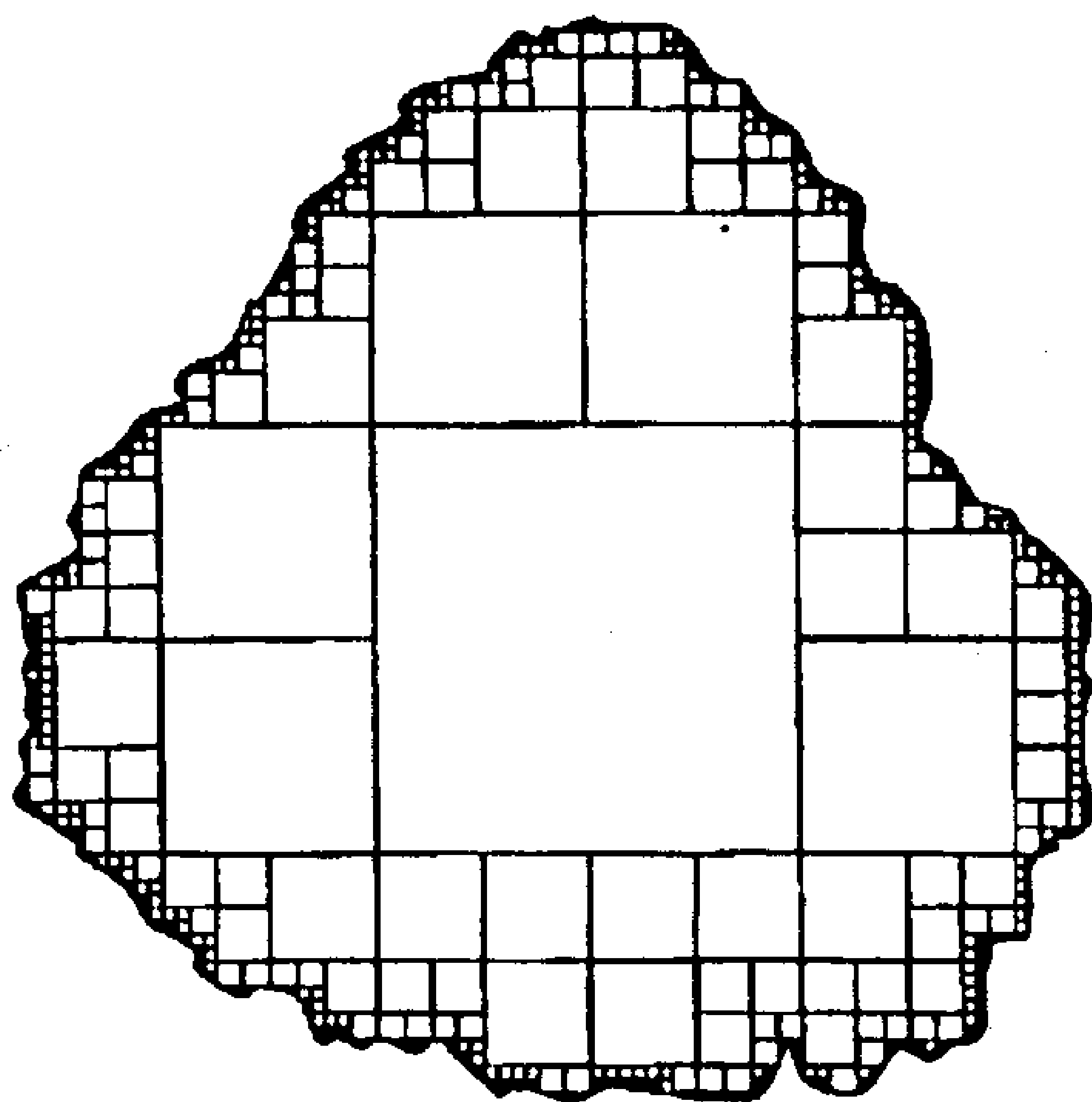


图 12.9 把区域分成二元正方形的Whitney 分解，利用它对拉普拉斯特征值的渐近分布进行估计

如果问题(12.38) 满足狄利克莱条件(12.37)，则关于它的特征值的一个经典结果是："所在区域越大，它的特征值越小"。即如果 $D'\subset D$，则对 $k=1,2,\cdots$，$D$的第 $k$ 个特征值不会大于$D'$相应的特征值。于是记 $D_k=\bigcup_{i=1}^{k}S_k$，并用 $N(\lambda)$ 及 $N_k(\lambda)$分别表示$D$和 $D_k$ 的特征值计数函数，则对任意 $k$，$N_k(\lambda)\leqslant N(\lambda)$。由于 $D_k$ 是不交的正方形之并，象前面一样，可以通过计算每个组成 $D_k$ 的正方形的特征值而得出 $N_k(\lambda)$。利用式(12.56)－(12.58)，则当 $k$ 充分大时

$$
\begin{aligned}
N(\lambda)\geqslant N_k(\lambda)&\geqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{4}\pi^{-1}\lambda 2^{-2i}n_i-\sum_{i=1}^{k}2\pi^{-1}\lambda^{1/2}2^{-i}n_i\\
&=\frac{1}{4}\pi^{-1}\lambda\mathcal{L}^2(D)-\frac{1}{4}\pi^{-1}\lambda\sum_{i=k+1}^{\infty}2^{-2i}n_i-2\pi^{-1}\lambda^{1/2}\sum_{i=1}^{k}2^{-i}n_i\\
&\geqslant\frac{1}{4}\pi^{-1}\lambda\mathcal{L}^2(D)-\frac{1}{4}\pi^{-1}\lambda\sum_{i=k+1}^{\infty}2^{i(s-2+\varepsilon)}-2\pi^{-1}\lambda^{1/2}\sum_{i=1}^{k}2^{i(s-1+\varepsilon)}
\end{aligned}
$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\pi^{-1}\lambda\mathcal{L}^2(D)-c_1\lambda 2^{k(s-2+\varepsilon)}-c_1\lambda^{1/2}2^{k(s-1+\varepsilon)}$$

其中 $c_1$ 与 $k$ 无关。给定 $\lambda>1$，取 $k$ 为满足 $2^{k-1}\leqslant\lambda^{1/2}<2^k$ 的整数，则

$$N(\lambda)\geqslant\frac{1}{4}\pi^{-1}\lambda\mathcal{L}^2(D)-c_1\lambda^{(s+\varepsilon)/2}$$

由此得出不等式(12.62)　　□

为了得到关于"误差"$N(\lambda)-\frac{1}{4}\pi^{-1}\mathcal{L}^2(D)\lambda$ 的更多的信息，这些方法已得到了进一步的发展。比如狄利克莱－纽曼划界方法用来证明这个误差也以 $\lambda^{s/2}$ 作为渐近的上界。在特殊的情况，利用 $\partial D$ 的几何性质可以计算出 $\lambda^{s/2}$ 的系数，这给出了 $N(\lambda)$ 的带有误差 $o(\lambda^{s/2})$ 的表达式。这个工作已推广到对任意 $n\geqslant1$，$D\subset\mathbb{R}^n$ 的区域上，同时也推广到其它椭圆型偏微分方程的特征值问题上。

## 12.3　带有分形边界区域上的热方程

进入或传出某区域的热能可能与它的边界的分形性质有关。下面考虑在平面区域的热传导问题，并用它来说明穿过边界的热流是如何与边界的维数相联系的。

设 $D$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的(有界开)区域，它的边界是 $\partial D$，设初始时刻 $D$ 区域内的温度都为 0，而在边界 $\partial D$ 上总是维持恒定的单位温度，热量传过边界，使这个区域受热，并扩散到整个 $D$ 上。(可以想象把一个零度的物体突然放进恒温烤箱)，我们希望估计出 $D$ 如何迅速地获得热量。

形式上，对区域 $D$，记 $u_D(x,t)$ 为点 $x\in D$ 在时刻 $t>0$ 时的温度，$\nabla^2$ 是拉普拉斯算子，则 $u_D$ 满足热方程：

$$\nabla^2 u_D(x,t)=\frac{\partial u_D}{\partial t}(x,t),\quad (x\in D,\ t>0)\tag{12.64}$$

$$u_D(x,0)=0\qquad (x\in D)\tag{12.65}$$

$$u_D(x,t)=1 \qquad (x\in\partial D,\ t>0) \tag{12.66}$$

这里初始条件(12.65)表示初始时刻 $D$ 上的温度为0，边界条件(12.66)表示在边界维持单位温度。在时刻 $t$，$D$ 上的全部热容量为：

$$h_D(t)=\int_D u_D(x,t)dx \tag{12.67}$$

令人感兴趣的是 $t$ 很小时 $h_D$ 的状况 。

对有光滑边界(如 $C^3$)的平面区域，很长时间以来就已了解，当 $t\to 0$ 时

$$h_D(t)=2\pi^{-1/2}t^{1/2}\mathcal{L}^1(\partial D)+O(t) \tag{12.68}$$

其中 $\mathcal{L}^1$ 是"长度"。上面的估计在 $D$ 具有多边形边界时也是对的。(事实上，无论是光滑边界或多边形边界的情形，通过 $D$ 的几何性质，已经很明确地找到了相应的"$t$ 的阶")。在式(12.68)的首项中的指数 $\frac{1}{2}$ 体现了 $D$ 的边界的特性 — 它是一维的。而对分形边界的区域，一般情况下这个指数比较小，这正好对应于热流通过"较大"的边界时的较快的速度。(在气象学中关系到穿过云层得到或失去热量的问题时，这个结果也是成立的，因为云层可以看成具有分形边界的)。

这里，将证明边界的维数给出了获得的热的上界，并在 von Koch雪花曲线围成的区域这种非常特殊的情况，得到了 $h_D(t)$ 的比较清楚的状况。首先需要圆区域上热方程的解的界，并由此可以导出一般区域上解的界 。

**引理 12.7**

在 $D=B(z,r)$ 情形下的式(12.64)－(12.66)的解，满足

$$u_{B(z,r)}(z,t)\leqslant 2e^{-r^2/4t} \tag{12.69}$$

其中 $B(z,r)$ 表示圆心在 $z$，半径为 $r$ 的圆 。

**证明** 函数

$$u(x,t)\equiv(2\pi t)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(z,r)}\exp(-|x-y|^2/4t)\mathrm{d}y \tag{12.70}$$

是连续的，容易看出对 $x\in \operatorname{int} B(z,r)$ 及 $t>0$, $\nabla^2 u=\dfrac{\partial u}{\partial t}$，并且对 $x\in\operatorname{int} B(z,r)$, 当 $t\to 0$ 时，$u(x,t)\to 0$, 而对 $x\in\partial B(z,r)$ 及 $t>0$, $u(x,t)\geqslant 1$。(为看清这最后一个性质，只需对高斯核进行积分，可得 $(2\pi t)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}\exp(-|x-y|^2/4t)\mathrm{d}y=2$；用 $\mathbb{R}^2\setminus B(z,r)$ 取代积分域 $\mathbb{R}^2$, 对边界上的每一点 $x\in\partial B(x,r)$, 新积分域包含一个半平面，至少保留积分值 2 的一半。) 如果边界的温度增加，则由于热方程的解得出的 $B(x,r)$ 上的点的温度不会减少，故对 $x\in B(x,r)$, $u_{B(z,r)}(x,t)\leqslant u(x,t)$，所以

$$\begin{aligned}u_{B(z,r)}(z,t)&\leqslant(2\pi t)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(z,r)}\exp(-|z-y|^2/4t)\mathrm{d}y\\&=t^{-1}\int_{\rho=r}^{\infty}\exp(-\rho^2/4t)\rho d\rho=2\mathrm{e}^{-r^2/4t}\end{aligned} \tag{12.71}$$

□

## 系 12.8

对 $z\in\operatorname{int}D$ 及 $t>0$, 方程(12.64)－(12.66)的解满足

$$u_D(z,t)\leqslant 2\mathrm{e}^{-\mathrm{d}^2(z,\partial D)/4t} \tag*{*(12.72)}$$

**证明** 记 $r=\mathrm{d}(z,\partial D)$, 则 $B(z,r)\subset D$。对 $x\in B(z,r)$, $B(z,r)$ 及 $D$ 这两个区域上的热方程(12.64)－(12.66)的解满足关系：

$$u_D(x,t)\leqslant u_{B(z,r)}(x,t)$$

(因为 $B(z,r)$ 的边界维持单位温度与更远的 $D$ 的边界上维持单位温度比起来，在前种情形下，$B(z,r)$的内部将热的快一些。) 由式

* 式(12.72)中，$\mathrm{d}(z,\partial D)$ 表示 $z$ 与 $\partial D$ 的距离．
— 译者注。

(12.69)，

$$u_D(z,t) \leqslant u_{B(z,r)}(z,t) \leqslant 2e^{-r^2/4t} \qquad \square$$

通过 $\partial D$ 的上内闵可夫斯基维数来限定 $D$ 的热容量，这可由式(12.61)得出

$$\overline{\dim}_1 \partial D = 2 - \liminf_{r\to 0} \log \mathcal{L}^2(E_r)/\log r \qquad (12.73)$$

其中 $E_r$ 是 $\partial D$ 的内 $r$-邻域 。

**命题 12.9**

设 $D$ 是满足 $\overline{\dim}_1 \partial D < s$ 的平面区域，则对任意 $t>0$，存在数 $c$，使

$$h_D(t) \leqslant c t^{1-s/2} \qquad (12.74)$$

**证明** 由 $\overline{\dim}_1 \partial D$ 的定义知，存在常数 $c_1$ 使对任意的 $r>0$，

$$\mathcal{L}^2(E_r) \leqslant c_1 r^{2-s}$$

利用式(12.72)，分部积分然后做变换 $u=r^2/t$，

$$\begin{aligned}
h_D(t) &= \int_D u_D(z,t)\,dz \\
&\leqslant 2\int_D e^{-d^2(z,\partial D)/4t}\,dz \\
&= 2\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2/4t}\,d\mathcal{L}^2(E_r) \\
&= [2e^{-r^2/4t}\mathcal{L}^2(E_r)]_0^{\infty} + t^{-1}\int_{r=0}^{\infty} r e^{-r^2/4t}\mathcal{L}^2(E_r)\,dr \\
&\leqslant c_1 t^{-1}\int_{r=0}^{\infty} r e^{-r^2/4t} r^{2-s}\,dr \\
&= \frac{1}{2} c_1 t^{1-s/2}\int_{r=0}^{\infty} e^{-u/4} u^{1-s/2}\,du
\end{aligned}$$

即式(12.74)得证。 □

这样，对较小的$t$，$\partial D$的(内闵可夫斯基)维数给出了$D$的热容量的一个上界。而在许多区域，对较小的$t$，这个热容量也有一个同数量阶的下界，所以

$$h_D(t) \simeq t^{1-s/2} \tag{12.75}$$

这里$s$是$\partial D$的内闵可夫斯基维数(假定它存在)。

下面就一种特殊的情形证明上面的结论，(其实在相当多情形下都成立)，这种情形就是由von Koch雪花曲线为边界的区域(由三段雪花曲线首尾相接)。证明中将利用边界的自相似性写出热容量的迭代关系，为了做到这点，需要热方程解的两个性质：第一个涉及到区域的比例性质，而第二个关系到把一个区域分割成子区域的问题。

**引理 12.10**

设$D$是一个区域，而$D'$是$D$的比例因子为$\lambda$的相似区域，则

$$h_{D'}(t) = \lambda^2 h_D(\lambda^{-2}t)$$

**证明** 可以设$D$和$D'$是以原点为相似中心的两个相似形，相似比为$\lambda$。又设$u_D$，$u_{D'}$分别是相对于区域$D$和$D'$的方程(12.64)－(12.66)的解。由微分法知当$t>0$，$x\in D'$时，$u_D(\lambda^{-1}x, \lambda^{-2}t)$满足式(12.64)；$x\in\partial D'$时，$u_D(\lambda^{-1}x, \lambda^{-2}t)=1$。而$t=0$时，$u_D(\lambda^{-1}x, \lambda^{-2}t)=0$。于是$u_{D'}(x,t)=u_D(\lambda^{-1}x, \lambda^{-2}t)$，因此

$$h_{D'}(t) = \int_{D'} u_D(\lambda^{-1}x,\ \lambda^{-2}t)dx$$

$$= \lambda^2\int_D u_D(y,\ \lambda^{-2}t)\mathrm{d}y = \lambda^2 h_D(\lambda^{-2}t)$$

上面做了代换　$y=\lambda^{-1}x$　□

**引理　12.11**

设区域$D$由多角形的线划分成如图12.10(a)、(b) 的子区域$D_1,\cdots,D_m$，则

$$h_D(t)=\sum_{i=1}^{m}h_{D_i}(t)+O(t^{1/2}) \tag{12.76}$$

**证明**　这是众所周知的"不触及边界原理"的一种描述方法，它表达了以下的似乎是有理的事实：把从区域$D$所获得的热量与分别考虑每个$D_i$所获得热量的和进行比较，其误差不会多于穿过多角分线的热量，而由式(12.68) 知道这个热量是$O(t^{1/2})$。这里省略了证明的技术细节。　□

利用这两个引理，可以估计以von Koch雪花曲线为边界的区域$D$的热容量，应记得，

$$\dim_H\partial D=\dim_B\partial D=\log4/\log3 \text{。}$$

**定理 12.12**

设$D$是以von Koch雪花曲线为边界的区域，则问题(12.64) −(12.66) 中的$D$的热容量(12.67) 在$t\searrow0$时，满足

$$h_D(t)=t^{\alpha}p(-\log t)+O(t^{1/2}) \tag{12.77}$$

其中$\alpha=1-\frac{1}{2}\log4/\log3=0.369$，$p$是周期为log9 的正的连续函数 。

**证明**　把区域$D$分割成图 12.10 表示的两种方式，在图 12.10(a) 中分割成三个全等的部分$D_1,D_2,D_3$，由引理 12.11

$$\begin{aligned}h_D(t)&=\sum_{i=1}^{3}h_{D_i}(t)+O(t^{1/2})\\&=3h_{D_1}(t)+O(t^{1/2})\end{aligned} \tag{12.78}$$

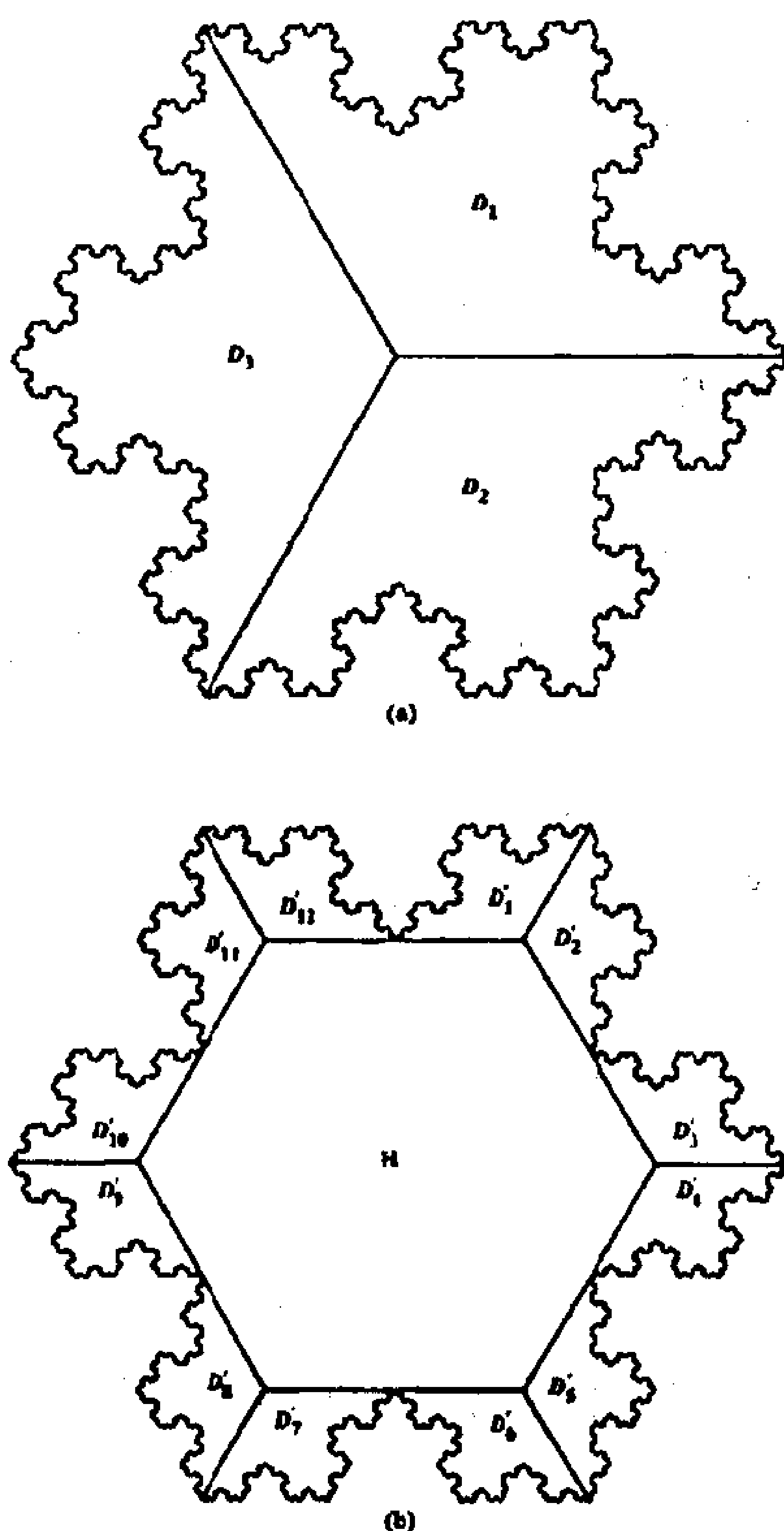



图 12.10　von Koch 雪花域分解成(a)3 个子域，(b)13 个子域

而图 12.10($b$) 中 $D$ 分割成十二个全等的 $D_1',\cdots,D_{12}'$ 及一个六边形 $H$，再次利用引理 12.11，由于对六边形式(12.68) 成立，则

$$
\begin{aligned}
h_D(t) &= \sum_{i=1}^{12} h_{D_i'}(t) + h_H(t) + O(t^{1/2}) \\
&= 12 h_{D_i'}(t) + O(t^{1/2})
\end{aligned}
$$

与式(12.78) 比较，并由于 $D_1'$ 是 $D_1$ 的相似比为 1/3 的相似形，利用引理 12.10，可得：

$$h_{D_1}(t)=4h_{D_1'}(t)+O(t^{1/2})$$
$$=4/9\ h_{D_1}(9t)+O(t^{1/2})$$

于是，由式(12.78)，对 $t>0$

$$h_D(t)=\frac{4}{9}\ h_D(9t)+q(t) \tag{12.79}$$

其中对充分小的 $t$，$q(t)=O(t^{1/2})$。

如果记

$$t=e^{-\tau},\ f(\tau)=e^{\alpha\tau}h_D(e^{-\tau}),\ g(\tau)=e^{\alpha\tau}q(e^{-\tau}) \tag{12.80}$$

其中 $\alpha=1-\frac{1}{2}\log4/\log3$，则正如 7.2 节的更新理论的例子，式(12.79) 成为

$$f(\tau)=f(\tau-\log9)+g(\tau) \tag{12.81}$$

因为 $h_D$ 有界连续，所以 $q$，$f$ 及 $g$ 也有界连续，并对 $\tau\geqslant0$，存在常数 $c$，使

$$|g(\tau)|\leqslant ce^{\tau(\alpha-1/2)} \tag{12.82}$$

定义 $p$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$p(\tau)=\sum_{i=1}^{k}g(\tau+i\log9)+f(\tau)$$

由式(12.82) 的结论知上面的级数一致绝对收敛，所以 $p$ 是连续的。利用式(12.81)

$$p(\tau)=p(\tau+\log9)$$

所以 $p$ 以 log9 为周期，而且，因为 $\alpha<\frac{1}{2}$

$$|f(\tau)-p(\tau)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|g(\tau+i\log9)|$$
$$\leqslant c\sum_{i=1}^{\infty}e^{(\alpha-1/2)(\tau+i\log9)}$$
$$\leqslant c_1e^{(\alpha-1/2)\tau}$$

其中 $c_1$ 是合适的常数。利用式(12.80) 变换成原来的变量，即得

式(12.77) □

注意式(12.81)是更新方程的一个非常特殊的情形，即是在式(7.19)的形式中恰好只有一个"时刻"的情形。直接把系7.3应用到式(12.81)可以得到

$$h_D(t) \sim t^2 p(-\log t)$$

而上面的分析可以给出误差的估计$O(t^{1/2})$。

经过相当的努力可以把式(12.77)改进为

$$h_D(t) = t^2 p(\log t) - tq(\log t) + O(e^{-\frac{1}{1152t}})$$

其中$p$、$q$具有周期log9，这是一个令人注意的指数误差的界的估计。

## 12.4 分形域上的微分方程

在前面的两节中讨论了带分形边界的$\mathbb{R}^n$区域上的微分方程。然而，在有些情况下，对定义在本身就是分形的集合上的"微分方程"求解是可行的，例如热流或电流传导通过高度多孔介质就属于这种情形。

在研究分形域上的微分方程中存在许多技术困难，在分形域上定义象拉普拉斯类型的微分算子的困难就不少。在引入这个复杂课题的同时，只给出Sierpinski三角形上的热方程及拉普拉斯算子特征值的分布的简要的叙述，由于Sierpinski三角形有良好的正则性及连通性质，使在其上的这方面的课题有一定的进展。

处理分形$E$上微分方程的大部分方法都依赖于$E$的近似图上的离散微分方程，其目的是为了取这种微分方程的规范解的极限，通过这个方法，得出$E$上的极限"微分方程"的一个非退化的解.

首先考虑如何在Sierpinski三角形$E$上定义能导出热方程解的布朗运动。回顾在$\mathbb{R}$上定义标准的布朗运动的方法，这种布朗运动是作为合适的尺度的随机游动的极限出现的，见FG16.1

节。设 $X_k(t)$ 是集 $\{j2^{-k}: j\in\mathbb{Z}\}$ 上的随机游动，从 $X_k(0)=0$ 开始，并且每过时间间隔 $4^{-k}$ 游动一步。所以在时刻 $m4^{-k}$ 的位置是 $X_k(m4^{-k})$，而在时刻 $(m+1)4^{-k}$ 的位置 $X_k((m+1)4^{-k})$ 恰好等可能地等于 $X_k(m4^{-k})-2^{-k}$ 或 $X_k(m4^{-k})+2^{-k}$。可以证明，当 $k\to\infty$ 时，随机游动序列 $X_k(t)$ 收敛到 $\mathbb{R}$ 上的称为一维布朗运动的过程 $X(t)$，（时间变量的尺度是空间变量尺度的平方，是收敛到非退化过程的必不可少的条件。）因此，当 $k$ 充分大时，在精细的比例尺之下，$X_k(t)$ 与 $X(t)$ 在所有方面都非常相似。对任意的 $t$ 及 $h\geqslant 0$，布朗运动的增量 $X(t+h)-X(t)$ 服从均值为零，方差为 $h$ 的正态分布，所以"典型"的，在持续时间为 $h$ 的时间间隔内，过程移动了 $h^{1/2}$ 的距离。而且，布朗运动有独立增量，即在轨道上没有时间记忆。更一般的是 $\mathbb{R}^n$ 上的布朗运动(可以看成是由 $n$ 维立方格子点上的一定尺度的随机游动的极限构造出来的。)，它的增量 $X(t+h)-X(t)$ 具有均值 0，而 $|X(t+h)-X(t)|$ 的方差是 $h$。

我们试图模拟 Sierpinski 三角形上布朗运动的构造，此时，把 $E$ 看成是延拓了的 Sierpinski 三角形是更合适的，即 $E$ 是按自相似性向外延拓，见图 12.11(这样就可以避免把通常的"有界"的 Sierpinski 三角形的三个角顶点看成是例外的点)。有一个自然的几何图形序列 $E_0,E_1,\cdots$ 逼近延拓了的 Sierpinski 三角形，见图 12.11。作为几何集，$E_0\subset E_1\subset E_2\subset\cdots$ 和 $E=\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k}$，记 $V_k$ 为 $E_k$ 的顶点集。于是图 $E_k$ 有长度为 $2^{-k}$ 的边，并且 $V_k$ 中的每个顶点有四个相邻的顶点。对 $k=0,1,2,\cdots,V_{k+1}$ 是 $V_k$ 再加上 $E_k$ 的所有边的中点，再联结上合适的边，就组成 $E_{k+1}$。

对 $k=0,1,2,\cdots$，在 $V_k$ 上定义沿 $E_k$ 的边游动的随机游动 $X_k(t)$，它从 $X_k(0)=0$ 开始，并在时间 $\alpha_k$($\alpha_k$ 是确定的)内移动一次。于是 $X_k(m\alpha_k)$ 是此随机游动在时刻 $m\alpha_k$ 时到达的 $V_k$ 的顶点，则 $X_k((m+1)\alpha_k)$ 是与 $X_k(m\alpha_k)$ 相邻的四个顶点之一，并以与前面任一步独立的，相等的1/4概率选择其中的一点。

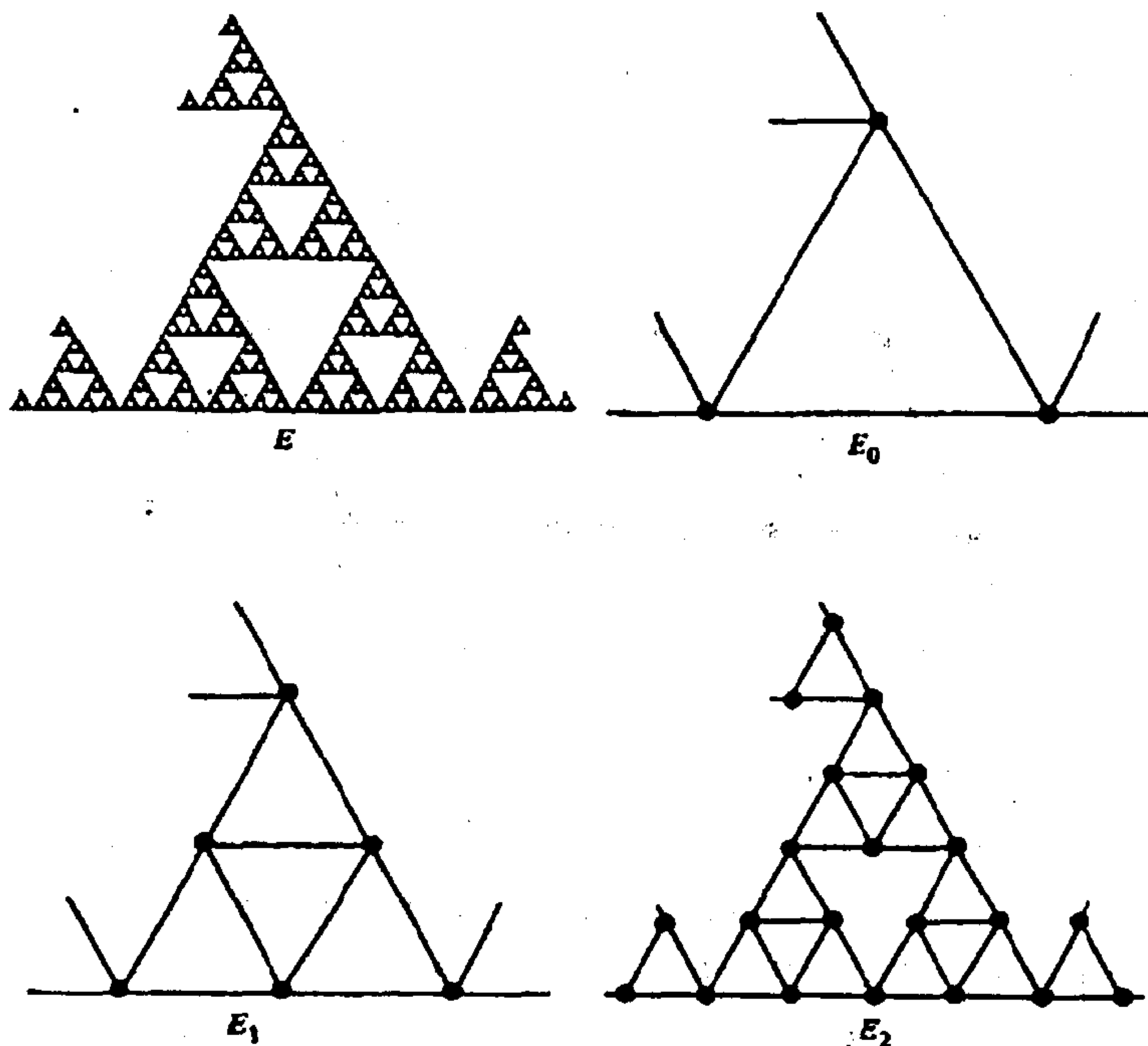



图 12.11　延拓了的 Sierpinski 三角形和近似图

对 $k \geqslant 1$,$E_k$ 上的这个随机游动 $X_k(t)$ 导出了 $E_{k-1}$ 上一个随机游动：简单地注意到由 $X_k(t)$ 访问过的 $V_{k-1}$ 的顶点序列(不考虑对同一个顶点的重复占有),并把它们看成是在 $E_{k-1}$ 上的随机游动访问的顶点序列。由 $E_k$ 的对称性,$E_{k-1}$ 上的随机游动运动到相邻四个顶点的概率也都是相等的，所以这就导出了与变化了的时间区间相适应步数的随机游动 $X_{k-1}(t)$。为了使随机游动 $X_k$ 能收敛到适当的极限过程，可以合理地选择时间区间 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$, 使对每个 $k$, $X_k(t)$ 从 $V_{k-1}$ 的顶点运动到 $V_{k-1}$ 的相邻顶点的时间是 $\alpha_{k-1}$, 至少可以从平均上保证每一步的时间是所希望的 $\alpha_{k-1}$ 。从下面的引理可知，这需要 $\alpha_{k-1} = 5\alpha_k$ 。(由于 $E_k$ 的每个顶点有四个相邻

的顶点，所以可能会认为这个倍数应当是 4, 但是 Sierpinski 三角形的几何性质却使 5 倍是正确的）。

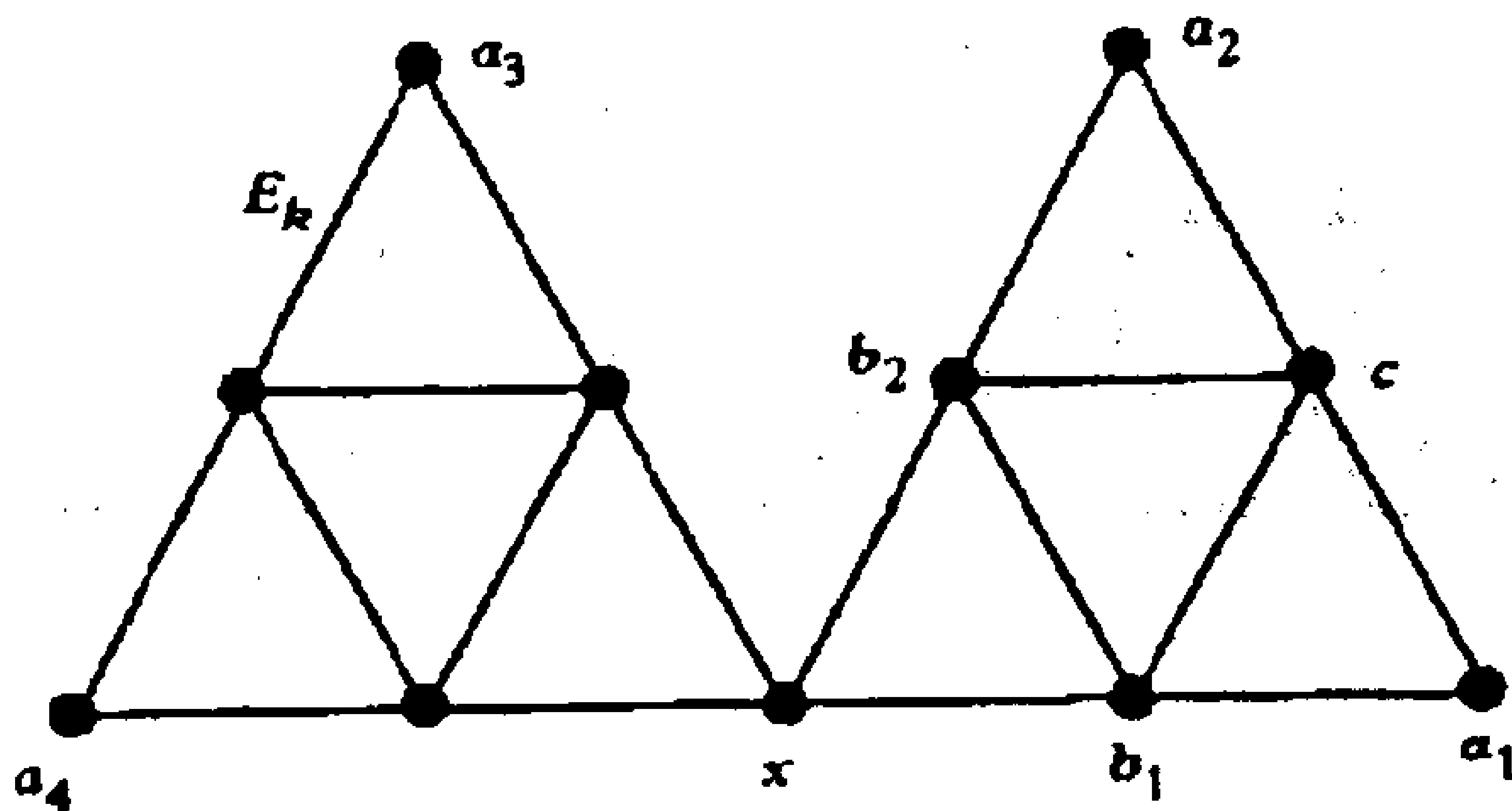



图 12.12 从 $x$ 出发的 $E_k$ 上的随机游动

**引理 12.13**

设 $X_k(t)$ 是上面所描述的 $E_k$ 上的随机游动，$x$ 是 $V_{k-1}$ 的顶点，而 $A$ 是 $V_{k-1}$ 中与 $x$ 相邻的四个顶点组成的集合。则在 $X_k(t)$ 位于 $x$ 的条件下，到达 $A$ 的点的期望步数等于 5 。

**证明** 由 $E_k$ 的对称性，$E_k$ 在 $x$ 附近的部分总可以表成如图 12.12 的形式，这里 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $b_1$, $b_2$, $c$ 如图所示。记 $\mathrm{E}(p,A)$ 为在 $E_k$ 上的随机游动从点 $p\in V_k$ 出发到达 $A$ 的期望步数。对给定的从 $x$ 出发的随机游动，在确定从 $x$ 运动到 $A$ 的期望步数 $\mathrm{E}(x,A)$ 时，利用对称性，可以假定第一步到达 $b_1$, 于是

$$\mathrm{E}(x,A)=1+\mathrm{E}(b_1,A)$$

通过考虑从 $b_1,b_2$ 和 $c$ 出发到达 $A$ 的可能的步数及其概率，则还有：

$$\mathrm{E}(b_2,A)=\mathrm{E}(b_1,A)=1+\frac{1}{4}\mathrm{E}(x,A)+\frac{1}{4}\mathrm{E}(b_2,A)+\frac{1}{4}\mathrm{E}(c,A)+\frac{1}{4}\times 0$$

$$\mathrm{E}(c,A)=1+\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{4}\mathrm{E}(b_1,A)+\frac{1}{4}\mathrm{E}(b_2,A)$$

解上述方程，可得 $\mathrm{E}(x,A)=5$ 。 □

于是，如果$E_k$ 上的随机游动$X_k$两每步之间的时间间隔确定为$\alpha_k$，则由它导出的$E_{k-1}$上的随机游动每步之间的平均时间间隔为$5\alpha_k$。为使 $k\to\infty$时 $X_k$ 有非平凡的极限，由$X_k$导出的 $E_{k-1}$上的随机游动必须在大范围内与随机游动 $X_{k-1}$ 很接近，为达到这点，对每个$k$，应使 $\alpha_{k-1}=5\alpha_k$ 。

因此，为保证尺度的相容性，令 $\alpha_k=5^{-k}$, $k=0,1,2,\cdots$，则与 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^n$ 上标准的布朗运动类似，可以证明，随机游动序列 $X_k(t)$ 收敛到随机过程 $X(t)$，这个过程称为延拓了的 Sierpinski 三角形 $E$ 上的布朗运动。

$\mathbb{R}$ 上的标准的布朗运动的基本性质也表现在 $E$ 上的布朗运动中，但指数有不同。有人可能会以为维数 $\dim_H E=\log3/\log2=1.585$ 是确定 $X(t)$ 在$E$上演化的决定性条件，事实上，与 $X(t)$ 运动更密切相关的是被称为游动维数的 $d_w$，这个维数反映了 $X(t)$ 在不同尺度下运动的速率。由引理 12.13, $X_k(t)$ 及其极限 $X(t)$，在 $V_{k-1}$的一个顶点运动到相邻的顶点的平均时间是 $5\alpha_k=5^{-k+1}$，在这期间运动的距离是 $2^{-k+1}$。所以，对每个时间间隔 $h$, $X(t)$ 运动的“标准”距离是 $h^{\log2/\log5}=2.322$。这就引出了*游动维数*的定义：$d_w=\log5/\log2=2.322$；这里，至少可以断言 $X(t)$ 的增量的均方对 $h>0$ 满足

$$\mathrm{E}(|X(t+h)-X(t)|^2)\asymp h^{2/d_w} \tag{12.83}$$

(可以与标准的布朗运动 $\mathrm{E}(|X(t+h)-X(t)|^2)=h$ 比较——它们的不相等是域 $E$ 的分形性的必然后果。)

上述的结果以及更多的结论可以粗略地证明，特别对 $X(0)=x$ 而 $X(t)$ 位于集 $A$ 的概率有关键的估计。设 $\mu$ 是 $s$ 维豪斯道夫测度在 $E$ 上的限制，这里 $s=\dim_H E=\log3/\log2$（所以 $\mu$ 自然是 $E$ 上的局部有限测度）。对从 $x$ 出发的布朗运动，存在*转移密度*

$p_t(x,y)$，它可以确定经过时间 $t$ 到达 $y$ 的概率密度，所以对 $x\in E$ 及可测集 $A$，

$$P(X(t+h)\in A|X(t)=x)=\int_A p_h(x,y)\mathrm{d}\mu(y) \qquad (12.84)$$

对 $p_t(x,y)$ 的了解能得到所研究的布朗运动的统计性质。通过对基本的随机游动 $X_k$ 的细致分析，可以证明，存在常数 $c_1,c_2,c_3,c_4>0$，使得对 $x,y\in E$ 及 $t>0$

$$c_1 t^{-s/d_w}\exp\left(-c_2(|x-y|t^{-1/d_w})^{d_w/(d_w-1)}\right)\leqslant p_t(x,y)$$

$$\leqslant c_3 t^{-s/d_w}\exp\left(-c_4(|x-y|t^{-1/d_w})^{d_w/(d_w-1)}\right) \qquad (12.85)$$

(可以与 $\mathbb{R}^n$ 上的标准布朗运动比较，在那里 $d_w=2$，$\mu=\mathcal{L}^n$，而转移概率密度是

$$p_t(x,y)=(2\pi t)^{-n/2}\exp(-|x-y|^2/2t) \qquad (12.86)$$

在本节的内容中，式(12.85)起了与熟悉的高斯核类似的作用.)

用标准的布朗运动中使用的平行的方法，可以证明以概率 1，$X(t)$ 的样本轨道满足 Hölder 条件，(请与 FG16.1 节比较)，对任意的 $\gamma<1/d_w$ 及 $0\leqslant t_1$，$t_2\leqslant T$，

$$|X(t_1)-X(t_2)|\leqslant c|t_1-t_2|^{\gamma} \qquad (12.87)$$

其中 $c$ 依赖于 $\gamma$ 和 $T$。而且，由于样本轨道的豪斯道夫维数是 log3/log2，所以轨道"充满"了集 $E$。

$\mathbb{R}^n$ 上的布朗运动与热方程的解紧密相关，$\mathbb{R}^n$ 中的热扩散可以看成是按布朗运动轨道独立运动的大量"热粒子"的综合作用。如果 $\nu$ 是 $t=0$ 时 $\mathbb{R}^n$ 上的热分布，则时刻 $t$ 在点 $x$ 的温度是：

$$u(x,t)=\int p_t(x,y)\mathrm{d}\nu(y) \qquad (12.88)$$

其中 $p_t$ 是式(12.86)表示的标准转移密度。可以通过微分验证 $p_t$ 满足

$$\frac{\partial p_t}{\partial t}=\frac{1}{2}\nabla_x^2 p_t$$

因此式(12.88) 满足 $\mathbb{R}^n$ 上的带有初始条件 $\int_A u(x,t)\mathrm{d}x \to \nu(A)$ $(t\to\infty)$ 的热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 u$$

用类似的方法，在延拓的 Sierpinski 三角形 $E$ 上的布朗运动也可以看成是 $E$ 上的热方程的模型．于是，在 $E$ 上的初始热分布能导出时刻 $t$ 的温度分布(12.88), 不过此时，$E$ 上的转移密度 $p_t$ 是由式(12.84) 给出的 。

为了得到以式(12.88) 为解的热方程的有意义的形式，应当指出这只能通过 $E$ 上的拉普拉斯算子 $\nabla^2$ 来表示。这里，再一次利用了序列的逼近。$\mathbb{R}$ 上的拉普拉斯算子，$d^2/dx^2$, 是下面差的极限

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x)=\lim_{h\to 0} h^{-2}[(f(x+h)-f(x))+(f(x-h)-f(x))] \qquad (12.89)$$

$$=\lim_{h\to 0} h^{-2}\sum_{y=x\pm h}(f(y)-f(x))$$

而对连续函数 $f: E\to\mathbb{R}$, 则通过几何图 $E_k$ 的序列的逼近来定义，见图 12.11。用$C(E)$ 表示 $E$ 上的连续函数类，按下式的要求定义 $\nabla^2 f\in C(E)$, 对任意有界集 $A$

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in A\cap V_k}\left|5^k\sum_{w\in V_k(x)}(f(w)-f(x))-\nabla^2 f(x)\right|=0 \qquad (12.90)$$

这里 $V_k(x)$ 包含 $V_k$ 上 $x$ 的四个相邻的顶点.(注意，$\nabla^2$只定义在 $c(E)$ 的子空间)，其中明确的数字"5"是使式(12.90) 有意义所需要的；正如下面将要指出的，这是游动维数等于 log5/log2 的直接推论。

对给定的 $k$，设 $x,y\in V_k$，根据对$E$上的布朗运动的假设，在时刻 0 时，它从 $x$ 出发，经过 $\delta t=5^{-k}$ 的时间，到达 $V_k$ 中的与 $x$ 相邻的 4 个顶点中的一个。( 从平均上讲，这是正确的 ), 考虑由下式给出的到达 $y$ 的转移密度：

$$p_{t+\delta t}(x,y) \simeq \sum_{w \in V_k(x)} \frac{1}{4} p_t(w,y)$$

其中 $x_1,\cdots,x_4 \in V_k(x)$ 是与 $x$ 相邻的顶点。于是

$$(p_{t+\delta t}(x,y)-p_t(x,y))/\delta t \simeq \frac{1}{4} 5^k \sum_{w \in V_k(x)} (p_t(w,y)-p_t(x,y))$$

令 $\delta t \to 0$, 并利用式(12.90), 即得

$$\frac{\partial p_t}{\partial t}(x,y)=\frac{1}{4} \nabla^2 p_t(x,y)$$

可以推出由式(12.88)定义的 $u$ 满足 $E$ 上的热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4} \nabla^2 u \tag{12.91}$$

这里 $p_t(x,y)$ 是 $E$ 上的布朗运动的转移密度。显然，在 $t$ 较小时，$p_t(x,\cdot)$ 在 $x$ 附近是压缩的（因为 $X(t)$ 不会运动太远）。所以当 $t \to 0$ 时 $\int_A u(x,t)\mathrm{d}\mu(x) \to \nu(A)$。于是，利用 $t=0$ 时的热分布 $\nu$, 布朗运动的积分式(12.88)解出了 $E$ 上的方程(12.91)。当然，可以通过进一步的努力，把上面的论述叙述得更严格些。

下面转向寻找分形域上的拉普拉斯算子的特征值的有关问题，这里，要求这个域是有界的。因此从现在起取 $E$ 是 Sierpinski 三角形（通常是非延拓的），并且以明显的方式将前面提到的记号修改成符合有界的假设。于是 $E_k$ 成为含有有限顶点的顶点集 $V_k$, 和一些长度为 $2^{-k}$ 的边组成的图，且 $k \to \infty$ 时，$E_k$ 通近 $E$。式(12.90)的拉普拉斯算子根据需要，做了少许的修改，成为 $\nabla^2 f \in C(E)$, 满足

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in V_k \setminus V_0} \left| 5^k \sum_{w \in V_k(x)} (f(w)-f(x)) - \nabla^2 f(x) \right| = 0 \tag{12.92}$$

这里 $V_k(x)$ 是 $V_k$ 中与 $x$ 相邻且不属于 $V_0$ 的顶点集合。在这样的模式中，令人感兴趣的是相应的狄利克莱问题的特征函数，这是在 $V_0$ 上，即 $E$ 的三个角顶点值为零的函数。可以证明，方程

$$\nabla^2 u = -\lambda u \ , \ u \in C(E) \ , \text{及} \ x \in V_0 \text{时} \ , \ u(x) = 0 \qquad (12.93)$$

的特征值是实的且是非负的，且由 12.2 节的思想，试图去估计第 $k$ 个特征值的大小 。

定义 $E$ 的谱维数 $d_s = 2\log3/\log5 = 1.365$ ，可以证明特征值计数函数 $N(\lambda)$ 满足

$$N(\lambda) = \#\{\text{方程(12.93)的不超过}\lambda\text{的特征值}\} \asymp \lambda^{d_s/2} \qquad (12.94)$$

(可以与在 $\mathbb{R}^n$ 中开区域上的Weyl 定理比较，在那里 $d_s$ 是由 $n$ 取代，见式(12.40))。粗略地看来，这是因为 Sierpinski 三角形能分割成仅由顶点联结的子三角形，因此这些三角形本质上是相互独立的，这与 $\mathbb{R}$ 中剪切集的特征值问题相似，见命题 12.5 。

为对此有些直觉，令 $F_1, F_2, F_3$ 是三个压缩比为1/2 的相似变换，它们分别把 $E$ 映射成组成 $E$ 的三个基本三角形。注意到，如果 $u$ 是方程(12.93) 的具有特征值 $\lambda$ 的特征函数，而且如果当 $x$ 趋近 $V_0$ 的点时，$u(x)$ 以充分快的速度趋于零。则对任意的 $\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_p)$, 函数

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{i}} &= u(F_{\mathbf{i}}^{-1}(x)) \quad (\text{如果} \ x \in F_{\mathbf{i}}(E)) \\ &= 0 \quad (\text{如果} \ x \in E \backslash F_{\mathbf{i}}(E)) \end{aligned} \qquad (12.95)$$

是具有特征值 $5^p\lambda$ 的特征函数，其中 $i_j \in \{1,2,3\}$, $F_{\mathbf{i}} = F_{i_1} \circ \cdots \circ F_{i_p}$ 。为看清这一点，注意到对在 $F_{\mathbf{i}}(E) \cap E_k$ 上而不是 $V_p$ 的顶点的 $x$ 点及 $k \gg p$ ，

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_{\mathbf{i}}(x) &\simeq 5^k \sum_{w \in V_k(x)} (u(F_{\mathbf{i}}^{-1}(w)) - u(F_{\mathbf{i}}^{-1}(x))) \\ &= 5^p \times 5^{k-p} \sum_{w' \in V_{k-p}(F_{\mathbf{i}}^{-1}(x))} (u(w') - u(F_{\mathbf{i}}^{-1}(x))) \\ &\simeq 5^p \nabla^2 u(F_{\mathbf{i}}^{-1}(x)) \\ &= 5^p \lambda u(F_{\mathbf{i}}^{-1}(x)) \\ &= 5^p \lambda u_{\mathbf{i}}(x). \end{aligned}$$

可以证明存在具有特征值 $\lambda_0 \geqslant 0$ 的特征函数 $u$，它在接近 $V_0$ 时充分快地趋于 0，所以对 $p=1,2,\cdots$ 至少存在 $3^p$ 个具有特征值 $5^p$ 的相互独立的特征函数。于是 $N(5^p\lambda_0)\geqslant 3^p$，所以 $N(\lambda)\geqslant c\lambda^{\log 3/\log 5}$，其中 c 是常数，为证式(12.94)只需再证明相反的不等式。而由于对任意 $i\in I$，利用式(12.95)可以证明，完整的特征函数族都可以从基本的非负特征函数 $u$ 得出，相反不等式的证明正取决于这一点。

由 $N(\lambda)$ 的渐近性质能得出更为精确的信息，用更新定理的方法(见7.2节)，可以得到周期为 log5 的正函数 $p$，使 $N(\lambda)\sim p(\log\lambda)\lambda^{d_s/2}$。

这里所叙述的定义布朗运动及在Sierpinski三角形上的拉普拉斯算子的方法可以延拓到任意超临界有限的自相似集，粗略地讲，这就是 IFS$\{F_1,\cdots,F_m\}$ 定义的，使 $F_i(E)\cap F_j(E)$ 是有限集 $(i\neq j)$ 的任意自相似集 $E$。例如，对图12.13的"六角形"，它的豪斯道夫维数 $\dim_H E=\log 6/\log 3=1.631$，

游动维数 $d_w=(\log 360-\log 19)/\log 3=2.678$，

而谱维数 $d_s=2\log 6/(\log 360-\log 19)=1.218$。

在这个例子中，游动维数表示通过 $E$ 扩散的速率的尺度性状，而谱维数则表示用式(12.92)定义拉普拉斯算子时所需的系数，它正好是特征值计数函数服从的幂定律中的指数的2倍。一般情况下，$d_w=2\dim_H E/d_s$，$\mathbb{R}^n$ 上的标准布朗运动及拉普拉斯算子也正好是这样，在那里 $d_s=\dim_H E=n$，而 $d_w=2$。

在这一节中，刚刚接触到分形域上的偏微分方程这个课题。在许多域上构造偏微分算子有进一步的困难，甚至在"简单的"Sierpinski地毯上(它不是超临界有限的)也如此。面对各种各样的分形域，以及随着各种物理过程逐步被合理定义的微分方程所模拟，将有力地促进这个课题的领域进一步向前发展。

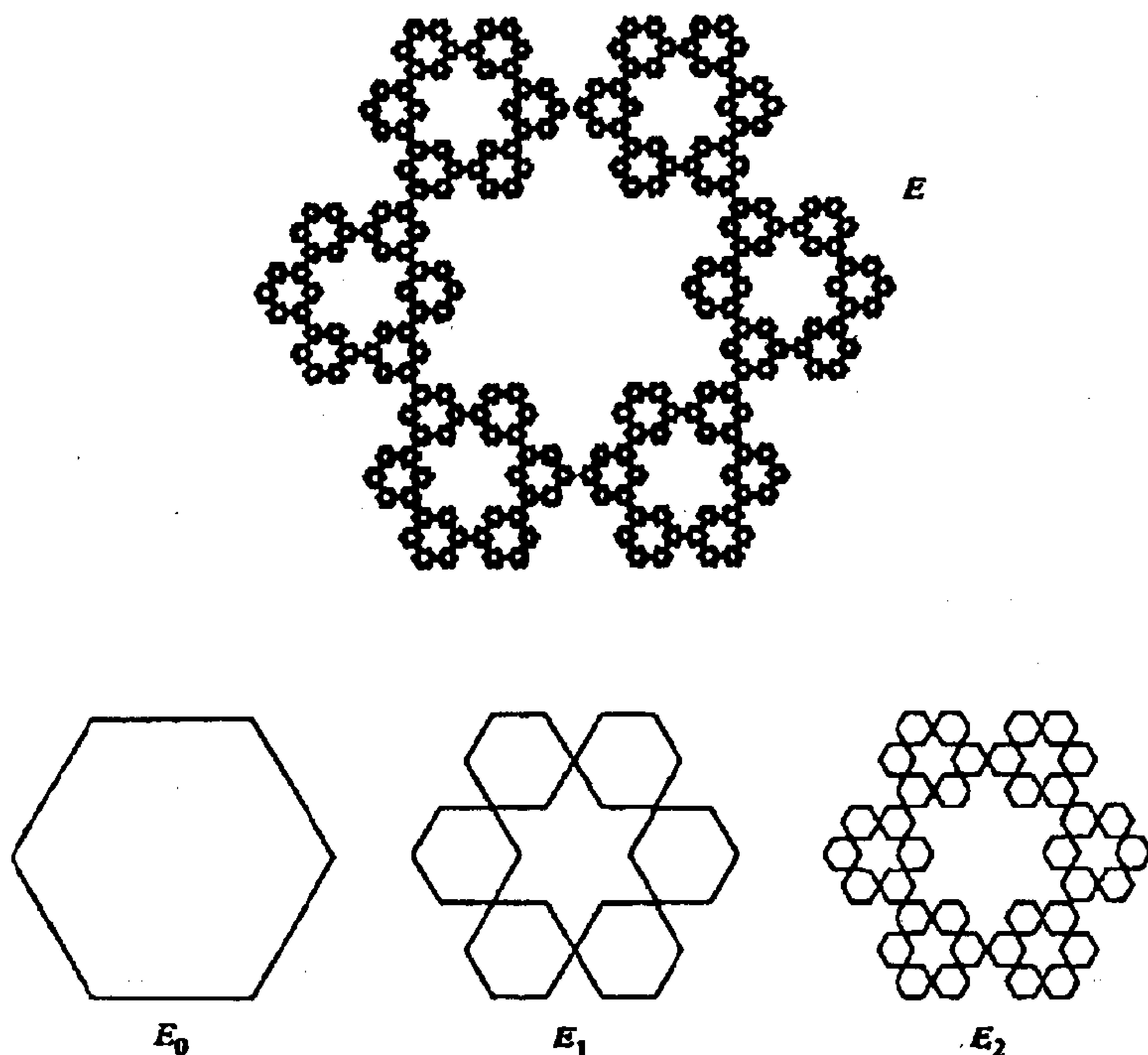



图 12.13 "六角形"$E$ 是超临界有限的自相似集，$E$ 上的热扩散和拉普拉斯算子可以用类似于 Sierpinski 三角形的方法，利用 $E_k$ 的逼近图来建立

## 12.5 注记与参考文献

12.1 节的方法已经被广泛地应用于各种各样的系统中，对不变集维数的基本估计的定理 12.2 是由 Douady 和 Oesterlé(1980) 给出的。这个理论在Ladyzhenskaya(1991) 和 Teman(1988) 的书中得到了相当详细的描述和发展。在他们的书中包含了许多在动力系统和微分方程中的进一步的应用，以及本课题发展的历史回

顾和许多进一步的参考文献。

特征值计数函数 $N(\lambda)$ 的渐近指数的第二项可能反映了有界域的分形维数的看法，首先是由 Berry(1979) 提出的，由此产生了由 Brossard 和 Carmona(1986) 讨论的问题："是否可以听出分形的维数?"，至于一维域中的问题，包括与黎曼 $\zeta$(zeta) 函数的联系是由 Lapidus 和 Pomerance(1993) 研究的，关于与黎曼假设的联系也可以参见 Lapidus 和 Maier (1995) 的文章。高维域中的特征值计数函数误差的界(对更一般的椭圆方程也有效)是由 Lapidus(1991) 得到的。在某些域上得到了更精确的估计，可参见 Fleckinger－Pelle 和 Vassilev(1993) 及 Chen 和 Sleeman(1995) 的文章，Lapidus(1993) 和 Sleeman(1995) 给出了这个课题的综述。

有关在多边形域上热方程的热量损耗估计的式(12.68)，请参见 van den Berg 及 Srisatkunarajah(1990) 的文章。有关雪花域上的渐近形式是由 Fleckinger 等人(1995) 导出的。而对更一般域上的估计式 (12.75)，则是 van den Berg(1994) 得到的。

Goldstein(1987) 和 Kusuoka(1987) 构造出了 Sierpinski 三角形上的扩散过程，Barlow 和 Perkins(1988) 给出了关于转移密度的详细分析。Barlow 和 Bass(1992) 把这个理论推广到(非超临界有限的) Sierpinski 地毯上。Kigami (1989) 定义了在 Sierpinski 三角形上的拉普拉斯算子，而 Fukushima 及 Shima (1992) 确定了它的特征值和特征函数。Kigami 和 Lapidus(1993) 找出了一般超临界有限自相似集的特征值的渐近分布，对这方面材料的综述可见 Kigami(1995) 的文章。

## 练习

12.1 证明由式(12.2) 给出的奇异值函数 $\omega_s$ 是半可乘的。(提示：先证明 $s$ 是整数的情形)。

12.2 利用$f(x,y)$的二阶迭代$f^2(x,y)$改进对 Hénon 吸引子维数的估计(这里需要一定的数值计算)。

12.3 验证式(12.56)(提示:利用$x$在整个单位正方形取值时,四分之一圆$Q(x, r)$上的格子点数的平均值等于$Q(0,r)$的面积,并考虑$Q(x,r)$的极值)。

12.4 证明边长为$a_i \asymp i^{-1/s}$的正方形的不交并组成的区域$D$上的特征值计数函数具有式(12.60)的形式,并且$\psi(\lambda) \asymp \lambda^{s/2}$。

12.5 利用自相似性得到$\#\{i: |A_i| \geqslant r\}$的递归式,并利用系 7.3 证明式(12.50)。

12.6 设$D$是由单位边长的 Sierpinski 地毯的余集的有界部分的并组成的域,证明存在常数$c$,使特征值计数函数

$$N(\lambda) \geqslant \frac{1}{4}\pi^{-1}\lambda - c\lambda^{-s/2},$$

其中$s = \dim_B E = \log 8/\log 3$。

12.7 在时刻$t=0$,热按有限测度$\nu$分布在平面域内,扩散是按二维热方程$\nabla^2 u = \partial u/\partial t$进行,验证

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-1}\int \exp(-|x-y|^2/4t)\mathrm{d}\nu(y)$$

给出了时刻$t$在$x$的温度。现在取$\nu$为$s$维豪斯道夫测度在满足强分离条件的自相似集$E \subset \mathbb{R}^n$上的限制,其中$s = \dim_H E$,证明$u(x,t) \asymp t^{s/2-1}$对充分小的$t$和$\nu$几乎所有的$x$成立。(提示:利用命题 6.5)。

12.8 设$D$是 Sierpinski 三角形的余集的有界部分,所以$\partial D$是 Sierpinski 三角形。证明在这种情形下,问题(12.64)-(12.66)中时刻$t$的热容量$h_D(t)$对较小的$t$满足$h_D(t) \asymp t^{1-s/2}$,其中$s = \dim_B \partial D = \log 3/\log 2$。

12.9 推广引理 12.13 的证明去证明$\mathrm{E}(t^N) = t^2(4-3t)^{-1}$是随

机变量 $N$ 的概率生成函数，其中 $N$ 表示在 $E_k$ 上随机游动在 $V_{k-1}$ 的两相邻顶点间一次行程所需的步数，验证 $\mathrm{E}(N)=5$ 。

12.10 利用式(12.85)对Sierpinski三角形上的布朗运动建立几乎必然的Hölder条件(12.87)。

12.11 设 $E\subset\mathbb{R}^3$ 是Sierpinski四面体(Sierpinski三角形的三维形态，从一个四面体反复的去掉一个倒置的小四面体而得到的图)。模仿Sierpinski三角形的理论推出 $\dim_H E=\dim_B E=2$，$d_w=\log6/\log2$ 及 $d_s=2\log4/\log6$ 。

12.12 设 $E$ 是图12.13中的六角形，验证文中叙述这种情形下的 $\dim_H E$, $d_w$ 和 $d_s$ 的值.

# 参 考 文 献

Arbeiter, M. and Patzschke, M. ( 1996) Random self−similar multifractals. Math. Nachr, 181,5−42.

Bandt, C., (1989) Self−similar sets 3. Constructions with sofic systems. Monatshefte für Mathematik 108, 89−102.

Bandt, C., Flachsmeyer, J. and Haase, H. (eds.) (1992) Topology, Measures and Fractals. Akademie Verlag.

Bandt, C., Graf, S. and Zähle, M. (1995) Fractal Geometry and Stochastics. Birkhäuser.

Barlow, M.T. and Bass, R.F. (1992) Transition densities for Brownian motion on the Sierpinski carpet. Probab. Th. Rel. Fields 91, 307−330.

Barlow, M. T. and Perkins, E. A. (1988) Brownian motion on the Sierpinski gasket. Probab. Th. Rel. Fields 79, 543−624.

Barnsley, M.F. (1988) Fractals Everywhere. Academic Press.

Barnsley, M.F. and Demko, S.G. (1985) Iterated function systems and the global construction of fractals. Proc. Roy. Soc. A399 243−275.

Barnsley, M.F. and Hurd, L.P. (1993) Fractal Image Compression. A. K. Peters.

Bedford, T. (1986) Dimension and dynamics of fractal recurrent sets. J. London Math. Soc. (2) 33, 89−100.

Bedford, T. (1991) Applications of dynamical systems to fractals−a study of cookie−cutter Cantor sets. In Fractal Geometry and Analysis (eds. J. Bélair and S, Dubuc), pp 1−44, Kluwer.

Bedford, T. and Fisher, A. (1992) Analogues of the Lebesgue density theorem for fractal sets of reals and integers. Proc. London Math.

Soc. (3) 64, 95-124.

Bedford, T., Keane, M. and Series, C. (1991) Ergodic Theory-Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces. Oxford University Press.

Bedford, T. and Urbanski, M. (1990) The box and Hausdorff dimension of self-affine sets. Ergodic Th. Dynam. Sys. 10, 627-644.

Bélair, J. and Dubuc, S. (eds.) (1991) Fracial Geometry and Analysis. Kluwer.

Beliman, R. (1960) Introduction to Matrix Analysis. McGraw-Hill.

Berg, van den M. (1994) Heat content and Brownian motion for some regions with a fractat boundary. Probab. Th. Related Fields, 100, 439-456.

Berg, van den M. and Srisatkunarajah, S. (1990) Heat flow and Brownian motion for a region in $R^2$ with a polygonal boundary. Probab. Th. Related Fields 86, 41-52.

Berry, M.V. (1979) Distribution of modes in fractal resonators. In Structural Stability in Physics (eds. W. Güttinger and H. Eikemeier), pp 51- 53, Springer-Verlag.

Besicovitch, A.S. and Taylor, S.J. (1954) On the complementary intervals of linear closed sets of zero Lebesgue measure. J. London Math. Soc. 29, 449-459.

Billingsley, P. (1965) Ergodic Theory and Information. John Wiley.

Birkhoff, G.D. (1931) Proof of the ergodic theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 17, 656-660.

Bowen, R. (1975) Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Differmorphisms. Lecture Notes in Mathematics 470, Springer-Verlag.

Brossard, J. and Carmona, R. (1986) Can one hear the dimension of a fractal? Commun. Math. Phys. 104, 103-122.

Brown, G., Michon, G. and Peyrière, J. (1992) On the multifractal analysis of measures. J. Stat. Phys. 66, 775-790.

Cawley, R. and Mauldin, R.D. (1992) Multifractal decomposition of Moran fractals. Adv. Math. 92,196−236.

Chen Hua and Sleeman, B. D. (1995) Fractal drums and the $n$−dimensional modified Weyl−Berry conjecture. Commun. Math. Phys. 168, 581−607.

Cherbit, G. (ed) (1991) fractals Non−integral dimensions and applications. John Wiley.

Cooper, D. and Pignataro, T. (1988) On the shape of Cantor sets. J. Differential Geom. 28, 203−221.

Cutler, C. D. (1986) The Hausdorff dimension distribution of finite measures in Euclidean space. Can. J. Math. 38, 1459−1484.

Cutler, C.D. (1990) Connecting ergodicity and dimension in dynamical systems. Ergodic Th. Dynam. Sys. 10, 451−462.

Cutler, C.D. (1992) Measure disintegrations with respect to $\sigma$−stable monotone indices and pointwise representation of packing dimension. Supp. Ai. Rend. Cir. Math. Palermo (II) 28, 319−340.

Cutler, C. D. (1995) Strong and weak duality principles for fractal dimension in Euclidean space. Math. Poc. Cambridge Philos. Soc. 118, 393−410.

Devaney, R.L. and Keen, L. (eds.) (1989) Chaos and Fractals−The Mathematics Behind the Computer Graphics. Proc. Symp. Applied Math. 39, American Mathematical Society.

Doob, J.L. (1994) Measure Theory. Springer-Verlag.

Douady, A. and Oesterlé, D. (1980) Dimension de Hausdorff des attracteurs. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér A290, 1135−1138.

Dunford, N. and Schwartz, J. T. (1958) Linear Operators, Pt I. Interscience.

Edgar, G. A. (1990) Measure, Topology, and Fractal Geometry. Springer−Verlag.

Edgar, G.A. (1993) Classics on Fractal,. Addison−Wesley.

Edgar, G.A. and Mauldin, R.D. (1992) Multifractal decompositions of digraph recursive fractals. Proc. London Math. Soc. (3) 65, 604–628.

Evertsz, C.J.G. and Mandelbrot, B.B. (1992) Multifractal measures. Appendix B in Chaos and Fractals (H.-O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe), Springer-Verlag.

Falconer, K.J. (1985) The Geometry of Fractal Sets. Cambridge University Press.

Falconer, K.J. (1988) The Hausdorff dimension of self-affine fractals. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 103, 339–350.

Falconer, K.J. (1989) Dimensions and measures of quasi self-similar sets. Proc. Amer. Math. Soc. 106,543–554.

Falconer, K.J. (1990) Fractal Geometry–Mathematical Foundations and Applications. John Wiley.

Falconer, K.J. (1992a) The dimension of self-affine fractals II, Math. Proc Cambridge Philos. Soc. 111, 169–179.

Falconer, K.J. (1992b) Wavelet transforms and order-two densities of fractals. J. Statistical Physics 67, 781–793.

Falconer, K. J. (1994) Bounded distortion and dimension for non-conformal repellers. Math. Proc. Cambridge Phiios. Soc. 115, 315–334.

Falconer, K.J. (1995a) Sub-self-similar sets. Trans. Amer. Math. Soc. 347, 3121–3129.

Falconer, K.J. (1995b) On the Minkowski measurability of fractals. Proc. Amer. Math. Soc. 123, 1115–1124.

Falconer, K.J. and Marsh, D.T. (1992) On the Lipschitz equivalence of Cantor sets. Mathematika 39, 222–233.

Falconer, K.J. and O'Neil, T.C. (1996) Vector-valued multifractal measures. Proc. Royal Soc. London A 452, 1–26.

Falconer, K.J. and Springer, O.B. (1995) Order-two density and

measures with non-integral dimension. Mathematatika 42,1－14.

Falconer, K.J. and Xiao, Y.M. (1995) Average densities of the image and zero set of stable processes. Stochastic Processes Appl. 55, 271－283.

Fan, A.H. (1994) On ergodicity and unidimensionality. Kyushu J. Math. 48, 249－255.

Feder, J. (1988) Fractals. Plenum Press.

Federer, H. (1969) Geometric Measure Theory. Springer-Verlag.

Feller, W. (1966) An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. 2, 2nd Edition, John Wiley.

Fisher, G. (1995) Fractal Image Compression: Theory and Applications. Springer-Verlag.

Fleckinger, J., Levitin, M. and Vassiliev, D. (1995) Heat equation on the triadic von Koch snowflake; asymptotic and numerical analysis. Proc. London Math. Soc. (3) 71, 372 396.

Fleckinger-Pelle, J. and Vassilev, D. (1993) An example of two term asymptotics for the "counting function" of a fractal drum. Trans. Amer. Math. Soc. 337, 99－116.

Fleischmann, M., Tildesley, D.J. and Ball, R.C. (eds.) (1990). Fractals in the Natural Sciences. Princeton University Press.

Frisch, U. and Parisi, G. (1985) Fully developed turbulence and intermittancy. In Turbulence and Predictability of Geophysical Flows and Climate Dynamics (eds M. Ghil, R. Benzi and G. Parissi), pp 84－88, North Holland.

Frostman, O. (1935) Potential d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. Meddel Lunds Univ. Mat. Sem. 3, 1－118.

Fukushima, M. and Shima, T. (1992) On a spectral analysis for the Sierpinski gasket. Potential Analysis 1, 1－35.

Goldstein, S. (1987) Random walks and diffusions on fractals. In

Percolation theory and ergodic theory of infinite particle systems, IMA Math. Appl. 8, 121−128, Springer.

Grimmett, G.R. and Striziker, D.R. (1992) Probability and Random Processes. 2nd Edition, Clarendon Press.

Haase, H. (1992) A survey of the dimensions of measures. In Topology, Measures and Fractals, Math. Research 66, 66−75, Academie_Verlag.

Halsey, T. C., Jensen, M. H., Kadanoff, L. P., Procaccia, I. and Shraiman, B.J. (1986) Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets. Phys. Rev,. A33, 1141−1151.

Hastings, H. M. (1993) Fractals: A User's Guide for the Natural Sciences. Oxford University Press.

Hausdorff, F.(1919) Dimension und äusseres Mass. Math. Ann. 79,157−179.

Hentschel, H. and Procaccia, I. (1983) The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. Physica 8D, 435−444.

Holschneider, M. (1995) Wavelets−An Analysis Tool. Clarendon Press.

Hu, X. and Taylor, S.J. (1994) Fractal properties of products and projections of measures in $R^d$ Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 115, 527−544.

Hueter, I. and Lalley, S.P. (1995) Falconer's formula for the Hausdorff dimension of a self- affine set in $R^2$. Ergodic Th. Dynam. Sys. 15, 77−97.

Hutchinson, J.E. (1981) Fractals and self- similarity. Indiana Univ. Math. J. 30, 713−747.

Kahane, J.-P. (1985) Some Random Series of Functions. Cambridge University Press.

Kahane, J.-P. and Katznelson, Y. (1990) Décomposition des mesures selon la dimension. Colloq. Math. 58, 269−279.

Kahane, J.-P. and Peyrière, J. (1976) Sur certaines martingales de

Benoit Mandelbrot. Adv. Math. 22, 131 145.

Katznelson, Y. and Weiss, B. (1982) A simple proof of some ergodic theorems. Israel J. Math. 42, 291 – 296.

Kigami, J. (1989) A harmonic calculus on the Sierpinski spaces. Japan J. Appl. Math. 6, 259 – 290.

Kigami, J. (1995) Laplacians on self-similar sets and their spectral distributions. In Fractal Geometry and Stochastics, Progress in Probability 37, 221 – 238, Birkhauser.

Kigami, J. and Lapidus, M.L. (1993) Weyl's problem for the spectral distribution of Laplacians on p.c.f. self-similar fractals. Commun. Math. Phys. 158, 93 – 125.

King, J. (1995) The singularity spectrum for general Sierpinski carpets. Adv. Math. 116, 1 – 11.

Kingman, J.F.C. and Taylor, S.J. (1966) Introduction to Measure and Probability. Cambridge University Press.

Kusuoka, S. (1987) A diffusion process on a fractal. In Probabilistic Methods in Mathematical Physics, Proc. Taniguchi Symp., Katata 1985, pp 251 – 274, Kino Kuniya-North Holland.

Ladyzhenskaya, O. (1991) Attractors for Semigroups and Evolution Equations. Cambridge University Press.

Lalley, S. P. (1988) The packing and covering functions of some self-similar fractals. Indiana Univ. Math. J. 37, 699 – 709.

Lalley, S. P. (1989) Renewal theorems in symbolic dynamics, with applications to geodesic flow, non-Euclidean tessellations and their fractal limits. Acta Math. 163, 1 – 55.

Lalley, S.P. (1991) Probabilistic methods in certain counting problems of ergodic theory. In Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces, pp 223 – 258, Oxford University Press.

Lapidus, M.L. (1991) Fractal drum, inverse spectral problems. for elliptic operators and a partial resolution of the Weyl-Berry

conjecture. Trans. Amer. Math. Soc. 325, 465-529.

Lapidus, M. L. (1993) Vibrations of fractal drums, the Riemann hypothesis, waves in fractal media and the Weyl-Berry conjecture. In Ordinary and Partial Differential Equations IV, Pitman Research Notes in Mathematics 289, pp 126-209, Longman Scientific.

Lapidus, M.L. and Maier, H. (1995) The Riemann hypothesis and inverse spectral problems for fractal strings. J. London Math. Soc. (2 (2) 52, 15-34.

Lapidus, M.L. and Pomerance, C. (1993) The Riemann zeta function and the one dimensional Weyl-Berry conjecture for fractal drums. Proc. London. Math. Soc. (3) 66, 41-49.

Leistritz, L. (1994) Geometrische und analytische Eigenschaften singularer Strukturen in $R^d$. Ph.D. Dissertation, University of Jena.

Levitin, M. and Vassiliev, D. (1996) Spectral asymptotic, renewal theorem, and the Berry conjective for a class of fractals. Proc. London Math. Soc. (3) 72, 188-214.

Lindvall, T. (1977) A probabilistic proof of Blackwell's renewal theorem. Ann. Probab. 5, 482-485.

Lopes, A.O. (1989) The dimension spectrum of the maximal measure. SIAM J. Math. Anal. 20, 1243-1254.

Mandelbrot, B.B. (1972) Renewal sets and random cutouts. Z. Warsch. Verw Geb. 22, 145-157.

Mandelbrot, B. B. (1974) Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. J. Fluid Mech. 62, 331-358.

Mandelbrot, B. B. (1975) Les Objects Fractals: Forme, Hasard et Dimension. Flammarion.

Mandelbrot, B. B. (1982) The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman.

Mandelbrot, B.B. (1991) Random multifractals: negative dimensions and

the resulting limitations of the thermodynamic formalism. Proc. Roy. Soc. A434, 79–88.

Mandelbrot, B. B. and Riedi, R. (1995) Multifractal formalism for infinte multinomial measures. Adv. Appl. Math. 16, 132–150.

Marstrand, J.M. (1954) Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions. Proc. London Math. Soc. (3) 4, 257–302.

Marstrand, J. M. (1996) Order-two density and the strong law. of large numbers. Mathematika 43, 1–22.

Massopust, P. R. (1994) Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets. Academic Press.

Mattila, P. (1995a) Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Cambridge University Press.

Mattila, P. (1995b) Cauchy singular integrals and rectifiability of measures in the plane. Adv. Math. 115, 1–34.

Mattila, P. and Preiss, D. (1995) Rectifiable measures in $R^n$ and existence of principal values for singular integrals. J. London Math. Soc. (2) 52, 482–496.

Mauldin, R.D. and Williams, S.C. (1988) Hausdorff dimension in graph directed constructions. Trans. Amer. Math. Soc. 309, 811–829.

McCluskay, H. and Manning, A. (1983) Hausdorff dimension for horseshoes. Ergodic Th. Dynam. Sys. 3, 251–260.

McLaughlin, J. (1987) A note on the Hausdorff measures of quasi-self-similar sets. Proc. Amer. Math. Soc. 100, 183–186.

Mehaute, A. (ed.) (1991) Fractal Geometries: Theory and Applications. Penton Press.

Moran, P.A.P. (1946) Additive functions of intervals and Hausdorff measure. Proc. Cambridge Philos. Soc. 42, 15–23.

Olsen, L. (1994) Random Geometrically Graph Directed Self-similar Multifractals. Longman Scientific and Technical.

Olsen, L. (1995) A multifractal formalism. Adv. Math. 116, 82 – 196.

Olsen, L. (1996) Multifractal dimensions of product measures. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 120, 709 – 734.

Parry, W. (1981) Topics in Ergodic Theory. Cambridge University Press.

Parry, W. and Pollicott, M. (1990) Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics. Asterisque 187 – 188, Société Mathématique de France.

Patzschke, N. and Zähle, M. (1993) Fractional differentiation in the self-affine case III. The density of the Cantor set. Proc. Amer. Math. Soc. 117, 132 – 144.

Peruggia, M. (1993) Discete Iterated Function schemes. A.K. Peters.

Petersen, K. (1983) Ergodic Theory. Cambridge University Press.

Peitgen, H.-O., Jürgens, H. and Saupe, D. (1992) Chaos and Fractals: New Frontiers of Science. Springer-Verlag.

Peitgen, H.-O. and Saupe, D. (eds.) (1988) The Science of Fractal Images. Springer-Verlag.

Pietronero, L. and Tosatti, E. (eds.) (1986) Fractals in Physics. North Holland.

Pollicott, M. (1992) Lectures on Pesin theory and ergodic theory on manifolds. Cambridge University Press.

Preiss, D. (1987) Geometry of measures in $R^n$ distribution, rectifiability and densities. Ann. of Math. 125, 537 – 643.

Rand, D. (1989) The singularity spectrum $f(\alpha)$ for cookie-cutters. Ergodic Th. Dynam. Sys. 9, 527 – 541.

Riedi, R. (1995) An improved multifractal formalism and self-similar measures. J. Math. Anal. Appl. 189, 492 – 490.

Rogers, C.A. (1970) Hausdorff Measures. Cambridge University Press.

Rogers, C. A. and Taylor, S. J. (1959) Additive set functions in Euclidean space. Acta Math. 101, 273 – 302.

Rogers, C.A. and Taylor, S.J. (1962) Functions continuous and singular with respect to a Hausdorff measure. Mathematika 8, 1-31.

Ruelle, D. (1978) Thermodynamic Formalism: the Mathematical Structures of Classical Equilibrium Statistical Mechanics. Addison-Wesley.

Ruelle, D. (1982) Repellers for real analytic maps. Ergodic Th. Dynam. Sys. 2, 99-107.

Rudin, W. (1973) Functional Analysis. McGraw-Hill.

Salli, A. (1985) Upper density properties of Hausdorff measures on fractals. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math. Dissertationes 55.

Sinai, Y.G. (1972) Gibbs measures in ergodic theory. Russian Math. Surveys 27, 21-70.

Sleeman, B.D. (1996) Some contributions to the Weyl-Berry conjecture for fractal domains. Int. J. Appl. Sci. Comp. 2, 344-361.

Smith, J. M. (1991) Fundamentals of Fractals for Engineers and Scientists. John Wiley.

Stoyan, D. and Stoyan, H. (1994) Fractals, Random Shapes and PointFields: Methods of Geometric Statistics. John Wiley.

Strichartz, R. S. (1993) Self-similar measures and their Fourier transforms III. Indiana Univ. Math. J. 42, 367-411.

Sullivan, D. (1983) Conformal dynamical systems. In Geometric Dynamics; Lecture Notes in Mathematics, 1007, 725-752, Springer-Verlag.

Tél, T. (1988) Fractals, multifractals and thermodynamics. Zeit. Naturforsch 43A, 1154-1174.

Temam, R. (1988) Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanicsand Physics. Springer-Verlag.

Tricot, C. (1982) Two definitions of fractional dimension. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 91, 54-74.

Tricot, C. (1995) Curves and fractal dimensions. Springer-Verlag.

Vicsek, T. (1992) Fractal Growth Phenomena, 2nd Edition, World Scientific.

Walters, P. (1982) An Introduction to Ergodic Theory. Springer-Verlag.

Wicks, K. R. (1991) Fractals and Hyperspaces. Lecture Notes in Mathematics 1492, Springer-Verlag.

Williams, D. (1991) Probability with Martingales. Cambridge University Press.

Zähle, U. (1984) Random fractals generated by random cutouts. Math. Nachr. 116, 27–52.

# 索 引

## I 英—汉

(括号中的数字表示首次出现的章节，按英语的第一字母为序)

I



K



L

N



O



P



Q

R



S

# Ⅱ、汉—英

(括号中的数字表示首次出现的章节,按拼音的第一字母为序)

D



E

F



G



H

T



X

# 译 后 记

自从 1991 年《分形几何 —— 数学基础及其应用》一书的中译本由东北大学出版社发行以来，英国数学家 Kenneth J. Falconer 的名字对中国研究分形的学者已是一点也不陌生了．他在分形理论上所做的大量的工作（请参见本书后的文献目录）也为广大数学工作者所熟知。

很荣幸，今年年初 Falconer 教授把他在 1997 年底刚出版的新著《Techniques in Fractal Geometry》(《分形几何中的技巧》) 寄送给我. 我们发现，这本书对指导深入进行分形研究有很大的现实意义，可以预料，此书中译本的出版，将进一步推动国内对分形的卓有成效的研究。

本书由三人共译，曾文曲译前言、引论、第 6, 10, 11, 12 章；陆夷译第 1 ~ 5 章；王向阳译 7 ~ 9 章．最后由曾文曲统稿，由于水平及其它方面的原因，译文中会有些错误，请读者发现之后及时告知，以便订正。

Falconer 教授始终支持我们的翻译工作，他首先帮我们与 John Wiley & Sons 出版社联系，解决了翻译版权的问题．在签署了出版协议之后，东北大学出版社已获得了此书中译本在中国出版发行的全部权利，这不能不首先感谢 Falconer 教授对我们的信任。其次对我们翻译中出现的问题，他总是有问必答，以最快的速度解决我们的疑难．在百忙之中他又给中译本写来了寓意深刻的《中译本前言》，对他的热忱在这里谨表示我们最深切的谢意。

东北大学出版社一贯支持科技新书的出版发行，我们谨对出版社编辑们为出版本书所付出的艰辛劳动表示衷心的谢忱。

曾文曲

1998 年 10 月于广东工业大学